Quelques conjectures si faciles à comprendre ...
mais qui résistent encore aux mathématiciens !

O. Viennet

Créé le : 27 mai 2006
Modifié le : 22 juin 2008

« Le philosophe, par exemple, estime que la vérité d'une même conclusion sera plus solidement établie s'il en a plusieurs preuves différentes.

Le mathématicien considère au contraire un théorème vrai dès qu'il en possède une seule démonstration ; les autres démonstrations qu'il pourra en donner par la suite pourront être plus simples ou plus élégantes, mais n'ajouteront rien à la vérité du théorème, lequel est incontestable pour peu qu'il ait été une fois établi.

L'argument décisif, et en dernière analyse unique, en faveur de la vérité d'un théorème consiste à en donner une démonstration, c'est à dire à montrer que son énoncé est le dernier d'une suite de phrases logiquement enchaînées les unes aux autres. »

Claude Chevallet, *Introduction à la théorie des ensembles*

Table des matières

0. http://perso.wanadoo.fr/yoda.guillaume/Vocabula/GlosC/Conjectu.htm#conj

1 Conjecture de Goldbach

Le 7 juin 1742 Christian Goldbach[1] adresse une lettre à Euler où il affirme que :

1.1 pour les nombres pairs

Non démontré

Tout entier pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers.

Exemples :

$6 = 3 + 3$	$8 = 3 + 5$	$10 = 3 + 7$	$12 = 5 + 7$	$14 = 3 + 11$
$16 = 3 + 13$	$18 = 5 + 13$	$20 = 3 + 17$	$22 = 5 + 17$	$24 = 11 + 13$

1.2 pour les nombres impairs (Conjecture de Goldbach faible)

Non démontré

Tout entier impair supérieur à 7 est la somme de trois nombres premiers.

Exemples :

$9 = 3 + 3 + 3$	$11 = 2 + 2 + 7$	$13 = 3 + 5 + 5$	$15 = 3 + 5 + 7$	$17 = 5 + 5 + 7$
$19 = 5 + 7 + 7$	$21 = 7 + 7 + 7$	$23 = 5 + 7 + 11$	$25 = 3 + 11 + 11$	

Cette conjecture faite en 1742 par Goldbach n'est à ce jour pas démontrée.

2 Conjecture de Sierpinsky

Non démontré

$\boxed{\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ a toujours une solution.}}$

Cette conjecture faite par Sierpinsky n'est à ce jour pas démontrée.

3 Conjecture d'Erdös-Straus

Non démontré

$\boxed{\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ a toujours une solution.}}$

Cette conjecture faite par Erdös et Straus n'est à ce jour pas démontrée.

4 Théorème de Fermat

Le dernier théorème de Fermat[2] , ou théorème de Fermat-Wiles, énonce que :

Démontré

il n'y a pas de nombres entiers positifs non nuls x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$ où n est un entier strictement supérieur à 2.

Pour les premières valeurs de n, il existe une infinité de solutions :
- le cas n = 1 est évident,
- le cas n = 2 admet notamment la solution classique $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Le théorème doit son nom à Pierre de Fermat qui, en 1637, écrivit en marge d'une traduction de l'*Arithmetica* de Diophante, à côté de l'énoncé de ce problème :
« J'ai trouvé une merveilleuse démonstration de cette proposition, mais la marge est trop étroite pour la contenir. »

Il a finalement été démontré en 1994/1995 par Andrew Wiles. La plupart des mathématiciens pensent aujourd'hui que Fermat s'était trompé : la preuve connue (raffinée depuis) fait appel à des outils très puissants de théorie des nombres.

1. http://villemin.gerard.free.fr/ThNbDemo/GoldbaIn.htm
2. http://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Fermat

5 A propos des nombres de Fermat

Ce sont les nombres[3] de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ ou n est un entier naturel.
Exemples :
$F_0 = 3$; $F_1 = 5$; $F_2 = 17$; $F_3 = 257$; $F_4 = 65537$
La conjecture faite en 1844 par Eisenstein n'est toujours pas démontrée :

Non démontré

Il a une infinité de nombre de Fermat qui sont premiers.

Faux

Par contre, Fermat en 1637 a émis la conjecture : « Les nombres de Fermat sont tous premiers ».
Mais Euler a prouvé en 1732 que cette conjecture était fausse avec $F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$.

Actuellement, on ne connaît que cinq nombres de Fermat premiers (F_1 à F_5).
En 2004, on ignorait encore s'il en existe d'autres, mais on sait que les nombres de Fermat F_n, pour n entre 5 et 32, sont tous composés ; F_{33} est le plus petit nombre de Fermat dont on ne sait pas s'il est premier ou composé.
Le plus grand nombre de Fermat dont on sait qu'il est composé est actuellement $F_{2478782}$.

6 A propos des nombres jumeaux

Deux nombres sont dits jumeaux[4] lorsque leur différence est 2. Ils sont donc de la forme n et $n+2$.
La conjecture s'énonce de la façon suivante :

Non démontré

Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ soit également premier.

Une telle paire de nombres premiers est appelée paire de nombres premiers jumeaux.
Exemples : 3 et 5 ; 5 et 7 ; 10 007 et 10 009
Cette conjecture n'est toujours pas démontrée.

7 La conjecture de Syracuse

La conjecture de Syracuse[5] concerne la suite de Syracuse définie de la manière suivante :
- On choisit initial un nombre entier naturel,
- Si ce nombre est pair, on prend comme nouveau nombre la moitié du nombre initial,
- Si ce nombre est impair, on prend comme nouveau nombre le triple du nombre initial plus 1.

Au lycée ce procédé sera noté par la suite : $u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$
Par exemple, en commençant avec 6, nous obtenons la suite (6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1).
Le calcul de la suite pour 7 : (7 , 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1).
La conjecture, non démontrée à ce jour, est appelée conjecture de Syracuse :

Non démontré

Toute suite de Syracuse finit inexorablement par boucler sur 4 , 2 , 1.

8 Conjecture d'Euler

Leonard Euler[6] avait cru que l'équation :

Faux

$X_1^n + X_2^n + \ldots + X_m^n = Z^n$ telle que $m < n$, n'avait pas de solution pour $n > 2$.

Autrement dit :
Aucune puissance n$^{\text{ème}}$ ne peut-être décomposée en somme de moins de n puissances n$^{\text{èmes}}$.
Par exemple, un cube n'est pas la somme de deux cubes : c'est vrai.
Mais en 1966, par exploration systématique par ordinateur, on a trouvé un contre exemple :
$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$
Pour la puissance quatre, il a fallu attendre les ordinateurs plus puissants.
La solution avec des entiers les plus petits serait : $95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$
$= 31858749840007945920321 \approx 2,3 \times 10^{22}$
La première solution trouvée était : $2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$
$= 180630077292169281088848499041 \approx 1,8 \times 10^{29}$

3. http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Fermat
4. http://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_des_nombres_premiers_jumeaux
5. http://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Syracuse
6. http://perso.wanadoo.fr/yoda.guillaume/CinqP11.htm#Euler