Formules et Algorithmes pour évaluer π.

Gérard Sookahet
Novembre 2000
v3.5

Bonjour Noble Lecteur

Ce texte est une liste de formules et algorithmes pour évaluer π avec plus ou moins de précision. Parfois y figurent un contexte historique, des références bibliographiques ou des démonstrations. Cette liste n'est évidemment pas exhaustive. Il y a, sans nul doute, au moment où vous lisez ces lignes, des personnes qui s'attachent à nous faire découvrir l'esthétique mathématique de nouvelles formules.

1)

$$\pi \approx \frac{22}{7} = 3,1428\ldots$$

Cette approximation était connue d'Archimède de Syracuse (287-212 avant J.C.). Ce dernier avait construit l'encadrement :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

2)

$$\pi \approx \frac{377}{120} = 3,1416\ldots$$

Cette approximation est le fait de l'astronome-mathématicien et géographe Claude Ptolémée d'Alexandrie aux environs de 150 après J.C. Elle était aussi connue de Al'Khwarizmi aux environs de 800 après J.C. .

3)

$$\pi \approx \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{229}}{8} = 3,1415932\ldots$$

C'est l'une des racines de l'équation $64x^2 - 160x - 129 = 0$.

4)

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3,1415929\ldots$$

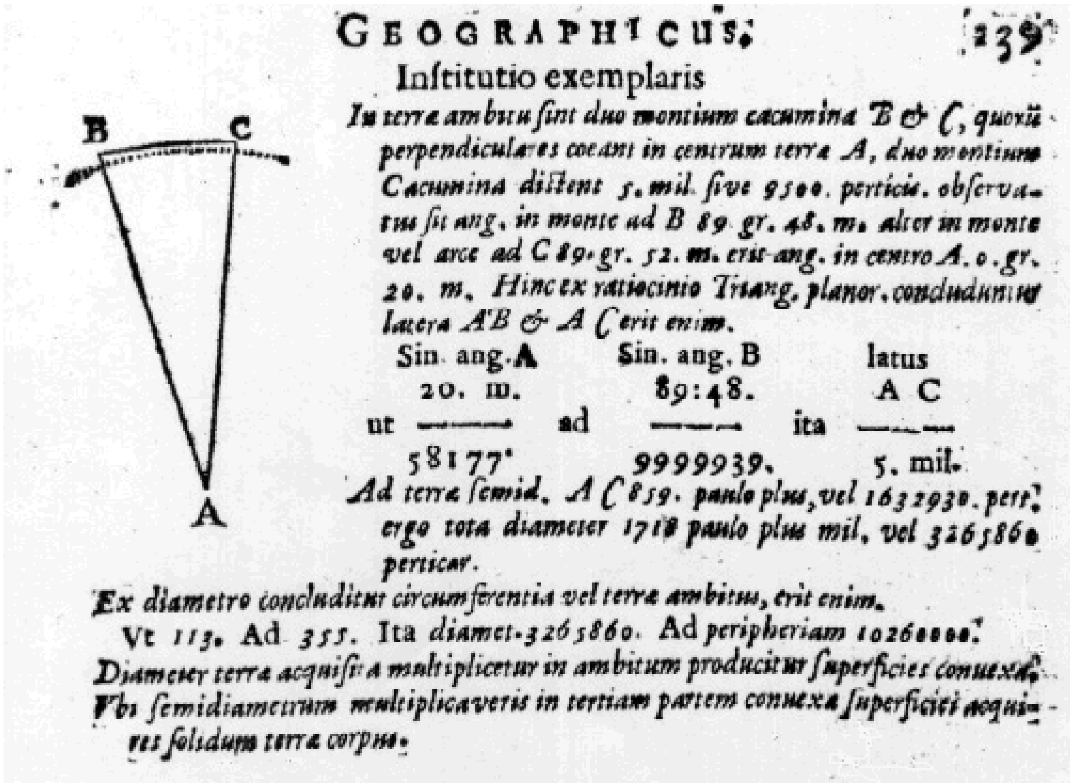
Cette approximation fut redécouverte par Adrien Métius (1571-1635). En fait cette fraction, ainsi que 22/7, est une réduite d'un développement en fraction continue de π :

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}}}}$$

d'où sont extraites les fractions suivantes :

$$\frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{1019514486099146}{324521540032945}, etc\,.$$

On constate que 103993/33102 est déjà une bonne approximation (8 décimales). C'est en partie grâce au 292 présent dans la fraction continue[71]. On trouve une très élégante interprétation géométrique de Félix Klein dans [82].
A propos d'Adrien Métius, ce dernier fait mention de l'approximation 355/113 dans le tome de Géographie des ouvrages *Primum Mobile, Astronomicè, Geometricè et Hydrophicè* publiés à Amsterdam en 1631. C'est plus précisément pour la mesure du diamètre de notre Terre que cette approximation est, pour ainsi dire, parachutée. Ces ouvrages font partie des fonds d'ouvrages anciens de la Bibliothèque de l'Université de Mons en Belgique. Ils y furent exposés le Vendredi 15 Octobre 1999. Grâce à Christian Radoux, en voici une reproduction:



Institutio exemplaris

In terra ambitu sint duo montium cacumina B & C, quorũ perpendiculares coeant in centrum terræ A, duo montium Cacumina distent 5. mil. sive 9500. perticis. observatus sit ang. in monte ad B 89 gr. 48. m. alter in monte vel arce ad C 89. gr. 52. m. erit ang. in centro A. 0. gr. 20. m. Hinc ex ratiocinio Triang. planor. concluduntur latera AB & AC erit enim.

	Sin. ang. A 20. m.		Sin. ang. B 89:48.		latus A C
ut	58177.	ad	9999939.	ita	5. mil.

Ad terræ semid. AC 859. paulo plus, vel 1632930. pert. ergo tota diameter 1718 paulo plus mil. vel 3265860 perticar.

Ex diametro concluditur circumferentia vel terræ ambitus, erit enim.

Vt 113. Ad 355. Ita diamet. 3265860. Ad peripheriam 10260000.

Diameter terræ acquisita multiplicetur in ambitum producitur superficies convexa. Vbi semidiametrum multiplicaveris in tertiam partem convexæ superficiei acquires solidum terræ corpus.

5)

$$\pi \approx \frac{167}{80} + \frac{\sqrt{10}}{3} = 3,1415925534\ldots$$

C'est l'une des racines de l'équation $57600x^2 - 240480x - 187001 = 0$. Le polynôme $9x^4 - 240x^2 + 1492$, trouvé par Kochansky, a aussi pour racine une approximation de π:

$$\pi \approx \sqrt{\frac{40}{3} - \sqrt{12}} = 3,141533\ldots$$

6)

$$\pi \approx \left(97 + \frac{1}{2} - \frac{1}{11}\right)^{1/4} = 3,1415926526\ldots$$

Cette étrange approximation est le fait de Srinivasa Aaiyangar Ramanujan (1887-1920). On peut la trouver dans [1][2]. Le raisonnement qui a conduit à ce résultat part de la constation suivante :

$$\pi^4 = 97.409091084002\ldots$$

Ainsi 09 apparaît deux fois dans les décimales de π^4. Ensuite, on peut dire que 10 est proche de 09. D'où :

$$97.40909090909\ldots = \frac{2143}{22} = 97 + \frac{1}{2} - \frac{1}{11}$$

Mais Ramanujan n'en resta pas là [3]. A partir de cela, il établit un développement en fraction continue de π^4 :

$$\pi^4 = 97 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16539 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}$$

7)

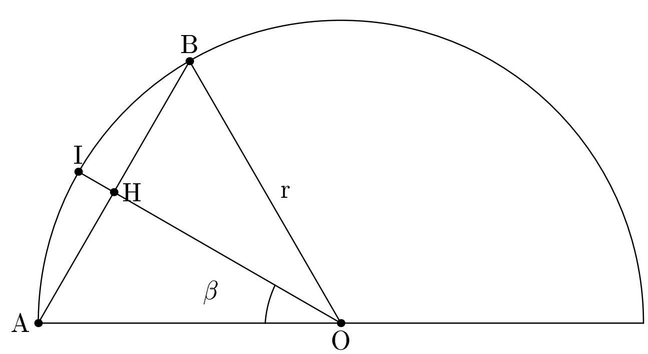
$$\pi \approx \frac{103993}{33102} = 3,141592654\ldots$$

cf. 4)

8)

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\ldots}}}$$

Cette formule est due au mathématicien français François Viète (1540-1603) et date de 1593 [57]. Elle lui permit de calculer 9 décimales. Il fut le premier à présumer de l'incommensurabilité de π et aussi le premier à représenter π à l'aide d'une expression analytique telle qu'une série infinie.
Cette formule est issue de la méthode des polygones inscrits utilisée par Archimède de Syracuse [52][53].



Ainsi, si l'on considère un n-gone inscrit dans un cercle de rayon $r = 1$, alors son aire sera $A_n = n \cdot S(OAB)$ (sachant que $S(OAB)$ désigne l'aire du triangle OAB).
Nous avons :

$$S(OAB) = OH \cdot HA = \sin\beta\cos\beta = \frac{1}{2}\sin 2\beta$$

D'où :

$$A_n = \frac{n}{2}\sin 2\beta = n\sin\beta\cos\beta$$

Selon le même raisonnement, l'aire d'un 2n-gone sera :

$$A_{2n} = 2n \cdot S(OAI) = 2n\frac{1}{2}\sin\beta$$

Faisons le rapport suivant :

$$\frac{A_n}{A_{2n}} = \frac{n\sin\beta\cos\beta}{n\sin\beta} = \cos\beta$$

De même nous avons :

$$\frac{A_{2n}}{A_{4n}} = \cos(\frac{\beta}{2})$$

Et en généralisant :

$$\frac{A_n}{A_{2^k n}} = \frac{A_n}{A_{2n}} \cdot \frac{A_{2n}}{A_{4n}} \cdot \frac{A_{4n}}{A_{8n}} \cdots \frac{A_{2^{k-1}n}}{A_{2^k n}} = \cos\beta\cos(\frac{\beta}{2})\cos(\frac{\beta}{4})\ldots\cos(\frac{\beta}{2^{k-1}})$$

Ainsi quand k tend vers l'infini, l'aire du polygone $A_{2^k n}$ inscrit dans le cercle de rayon $r = 1$ tend vers l'aire de ce dernier, c'est à dire π.
Donc :

$$\pi = \lim_{k\to+\infty} \frac{A_n}{\cos\beta\cos(\frac{\beta}{2})\cos(\frac{\beta}{2^2})\ldots\cos(\frac{\beta}{2^k})}$$

Et :

$$\pi = \frac{\frac{1}{2}n\sin 2\beta}{\cos\beta\cos(\frac{\beta}{2})\cos(\frac{\beta}{2^2})\ldots\cos(\frac{\beta}{2^k})}$$

En prennant $n = 4$, François Viète [35] obtient $\cos\beta = \sqrt{1/2}$ et $\sin 2\beta = 1$.
Puis en utilisant l'une des formules de bissection :

$$\cos^2(\frac{\beta}{2}) = \frac{1}{2}(1 + \cos\beta),$$

il établit sa formule.
Notons une étonnante formule [80] qui fait intervenir la formule de Viète ainsi q'un produit remarquable que nous allons voir par la suite:

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2^p\pi n-\theta}{2^p\pi n}\cdot\frac{2^p\pi n+\theta}{2^p\pi n}\Big)\cdot\prod_{n=1}^{p}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta}}}}$$

9)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\ \ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\ \ldots} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$$

C'est la fameuse formule du mathématicien britannique John Wallis (1616-1703). Il la découvrit en 1655 et la publia dans *Arithmetica Infinitorum*. Cette formule est facile à établir. Pour résumer sa démonstration, il faut d'abord prouver la formule de récurrence suivante par une double intégration par parties :

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2} x dx \quad (n>2)$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sin^{2k+1} x dx &= \frac{2k(2k-2)\ldots\ldots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots\ldots 5\cdot 3}1\\ \int_0^{\pi/2}\sin^{2k} x dx &= \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots\ldots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\ldots\ldots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de diviser membre à membre les deux égalités et de montrer que le quotient des deux intégrales tend vers 1 quand k tend vers l'infini. Ceci établit la formule de Wallis.
Cette dernière peut aussi s'exprimer différemment :

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)},$$

ou comme dans [39] :

$$\pi = 2\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}\right]^2$$

La formule de Wallis est un cas particulier de cette formule:

$$\pi = a\sin(\frac{\pi}{a})\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(an)^2}{(an-1)(an+1)},$$

qui s'obtient en partant du développement en produit infini de la fonction sinus(cf. 16)).
A partir de la formule de Wallis, on peut aussi obtenir la série suivante :

$$\pi = \frac{2}{1!} + \frac{(1!)^2 2^2}{3!} + \frac{(2!)^2 2^3}{5!} + \frac{(3!)^2 2^4}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Pour finir notons que Wallis introduisit le symbole qui désigne de nos jours l'infini : ∞.

10)

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cdots}}}}}}$$

Cette formule est due à Lord William Brouncker (1620-1684) et date de 1655. Son contexte historique est asssez intéressant. En effet, Lord W. Brouncker n'était pas mathématicien mais homme politique et 1^{er} Président et fondateur de la Royal Society. C'était un ami de John Wallis. Ce dernier, connaissant son penchant pour les mathématiques, lui avait communiqué sa dernière découverte (cf. 9). Ainsi c'est à partir de la formule de Wallis qu'il construisit cette formule sans pour autant en donner une démonstration claire. C'est Leonhard Euler (1707-1783) qui s'en chargea bien plus tard. La démonstration d'Euler figure dans [37]. L'idée principale étant de montrer que la fraction continue:

$$\arctan x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 - x^2 + \cfrac{3^2 x^2}{5 - 3x^2 + \cfrac{5^2 x^2}{7 - 5x^2 + \cfrac{7^2 x^2}{9 - 7x^2 + \cfrac{9^2}{11 - 9x^2 + \cdots}}}}}}$$

équivaut à la série:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

pour $-1 \leq x \leq 1$.
Il mit aussi en évidence cette remarquable formule dans un cas plus général :

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+\cdots=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{a_1^2}{a_2-a_1+\cfrac{a_2^2}{a_3-a_2+\cfrac{a_3^2}{a_4-a_3+\cfrac{a_4^2}{a_5-a_4+\cdots}}}}}$$

En utilisant la formule de Gregory-Leibniz(cf. 12)) on retrouve la formule de Brouckner. Wallis avait parlé de cette formule à Huygens et ce dernier pensait qu'elle était fausse.
Notons qu'il ne s'agit pas d'une fraction continue comme on l'entend habituellement. On parle alors de *fraction continue généralisée*.
Il y en bien d'autres parmi lesquelles:

$$\pi=3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{9^2}{6+\cfrac{11^2}{6+\cdots}}}}}}$$

C'est la découverte de L.J. Lange. Sa démonstration figure dans [79]. Notons au passage que Ramanujan, ainsi que Preece, ont obtenu une formule en relation avec cette dernière:

$$x+\cfrac{1^2}{2x+\cfrac{3^2}{2x+\cfrac{5^2}{2x+\cfrac{7^2}{2x+\cdots}}}}=4\cdot\frac{\Gamma(\frac{x+3}{4})\Gamma(\frac{x+3}{4})}{\Gamma(\frac{x+1}{4})\Gamma(\frac{x+1}{4})}$$

La fraction continue de L.J. Lange peut aussi s'obtenir en partant de la série:

$$\frac{\pi-3}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1})$$

Sinon voici d'autres fractions continues:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1 \cdot 2}{1 + \cfrac{2 \cdot 3}{1 + \cfrac{3 \cdot 4}{1 + \cfrac{4 \cdot 5}{1 + \cfrac{5 \cdot 6}{1 + \cdots}}}}}}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1 \cdot 3}{4 + \cfrac{3 \cdot 5}{4 + \cfrac{5 \cdot 7}{4 + \cfrac{7 \cdot 9}{4 + \cfrac{9 \cdot 11}{4 + \cdots}}}}}}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2 \cdot 3}{1 - \cfrac{1 \cdot 2}{3 - \cfrac{4 \cdot 5}{1 - \cfrac{3 \cdot 4}{3 - \cfrac{6 \cdot 7}{1 - \cdots}}}}}}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{11 + \cfrac{6^2}{13 + \cdots}}}}}}$$

$$\frac{16}{\pi} = 5 + \cfrac{1^2}{10 + \cfrac{3^2}{10 + \cfrac{5^2}{10 + \cfrac{7^2}{10 + \cfrac{9^2}{10 + \cfrac{11^2}{10 + \cdots}}}}}}$$

$$\frac{12}{\pi^2} = 1 + \cfrac{1^4}{3 + \cfrac{2^4}{5 + \cfrac{3^4}{7 + \cfrac{4^4}{9 + \cfrac{5^4}{11 + \cfrac{6^4}{13 + \cdots}}}}}}$$

$$\frac{2}{\pi - 2} = 1 + \cfrac{1 \cdot 2}{1 + \cfrac{2 \cdot 3}{1 + \cfrac{3 \cdot 4}{1 + \cfrac{4 \cdot 5}{1 + \cfrac{5 \cdot 6}{1 + \cfrac{6 \cdot 7}{1 + \cdots}}}}}}$$

$$\frac{2}{\pi - 2} = -3 + \cfrac{2 \cdot 3}{1 - \cfrac{1 \cdot 2}{3 - \cfrac{4 \cdot 5}{1 - \cfrac{3 \cdot 4}{3 - \cfrac{6 \cdot 7}{1 - \cfrac{5 \cdot 6}{3 - \cfrac{8 \cdot 9}{1 - \cdots}}}}}}}$$

$$\frac{2}{\pi - 2} = 3 - \cfrac{2^2 \cdot 1 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2 - 1 \cdot 3^2 \cdot 5 - \cfrac{4^2 \cdot 3 \cdot 5}{4^2 \cdot 6^2 - 3 \cdot 5^2 \cdot 7 - \cfrac{6^2 \cdot 5 \cdot 7}{6^2 \cdot 8^2 - 5 \cdot 7^2 \cdot 9 - \cdots}}}$$

$$\frac{6}{\pi^2 - 6} = 1 + \cfrac{1^2}{1 + \cfrac{1 \cdot 2}{1 + \cfrac{2^2}{1 + \cfrac{2 \cdot 3}{1 + \cfrac{3^2}{1 + \cfrac{3 \cdot 4}{1 + \cdots}}}}}}$$

$$\frac{12}{\pi^2 - 4} = 1 + \cfrac{1 \cdot 5 \cdot 1^2 \cdot 2^2}{4^2 - 3^2 + \cfrac{3 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{9^2 - 8^2 - \cfrac{5 \cdot 9 \cdot 3^2 \cdot 4^2}{16^2 - 15^2 + \cfrac{7 \cdot 11 \cdot 4^2 \cdot 5^2}{25^2 - 24^2 + \cdots}}}}$$

11)

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{78\cdot 2^9} - \ldots\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2}\,dx$$

Cette formule est due à Sir Isaac Newton (1642-1727) et date de 1666. Elle fut construite à partir d'une série dérivant d'un développement de la fonction arcsinus. Cela permit à Newton de calculer π avec 15 décimales (le calcul fut fastidieux!).
Quant au développement en série de $\arcsin x$, il s'écrit :

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$

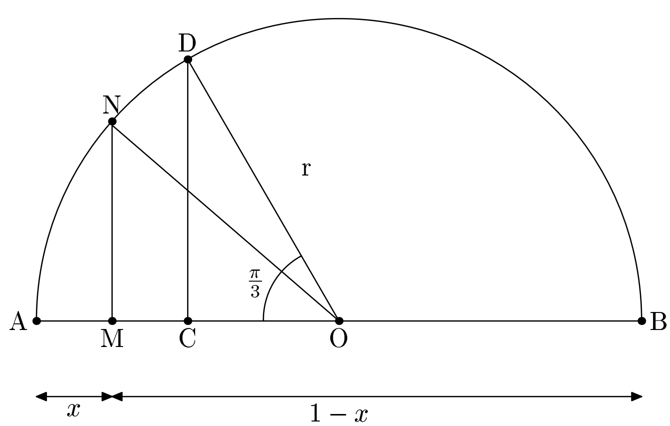
D'où l'on peut en déduire :

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin 1 = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{7} + \ldots$$

Cependant il y a un peu plus rapide :

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{(2)\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{(2\cdot 4)\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2\cdot 4\cdot 6)\cdot 7\cdot 2^7} + \ldots$$

La démonstration de la formule de Newton figure dans le fameux *Traité de la méthode des fluxions et des séries infinies.*



Considérons un cercle de rayon $r = 1/2$. l'astuce consiste à calculer l'aire du domaine ACD délimité par les segments AC, CD et l'arc de cercle AD par des voies géométriques et analytiques. Ensuite il suffit d'égaler les deux résultats. Géométriquement nous avons :

$$S(ACD) = S(AOD) - S(triangle(ODC)),$$

où $S(\ )$ désigne une surface.
Cela nous fait :

$$\begin{aligned} S(ACD) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\Big)-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\Big) \\ S(ACD) &= \frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$

D'un point de vue analytique nous avons :

$$S(ACD)=\int_0^{1/4} MNdx$$

Or $MN^2 = AM\cdot MB = x(1-x)$. Ce résultat peut-être établit en appliquant le théorème de Pythagore aux triangles rectangles ANB, ANM et ANB.
D'où :

$$S(ACD)=\int_0^{1/4}\sqrt{x}\sqrt{1-x}dx$$

Faisons un développement en série de $\sqrt{1-x}$:

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^5-\dots$$

En multipliant par $\sqrt{x}$ il vient :

$$\sqrt{x}\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x^{1/2}-\frac{1}{2\cdot 4}x^{2+1/2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^{3+1/2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^{5+1/2}-\dots$$

En intégrant les termes de la série :

$$\int_0^{1/4}\sqrt{x}\sqrt{1-x}dx=[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{2}\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{1}{2\cdot 4}\frac{2}{7}x^{7/2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{2}{9}x^{9/2}-\dots]_0^{1/4}$$

Ainsi nous avons :

$$\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{32}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2^7}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\dots$$

En isolant π dans cette dernière égalité, on trouve la formule de Newton.

12)

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots$$

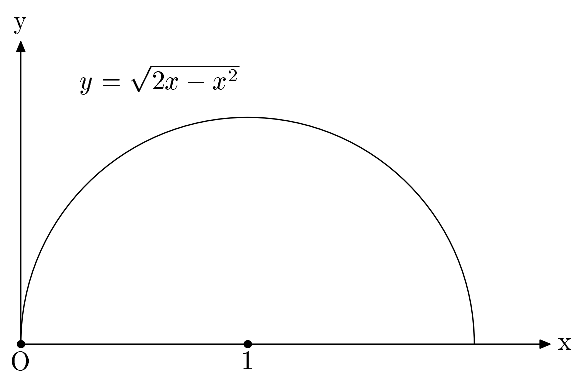
Cette formule est attribuée à la fois au mathématicien-astronome écossais James Gregory (1638-1675) en 1671 et au mathématicien-philosophe allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) en 1674. Elle résulte du développement en série de la fonction arctangente en $x = 1$.

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$$

Son utilisation n'est pas très pratique. Pour obtenir une précision de 3 décimales, il faut sommer à peu près 500 termes, 10 fois plus pour 4 décimales, 100 fois plus pour 5 décimales, etc.
Néanmoins il est possible d'améliorer la précision pour un même nombre de termes en appliquant une transformation d'Euler[3]. A titre d'exemple une transformation d'Euler peut donner :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Historiquement il semblerait que Leibniz ne connaissait pas le développement de la fonction arctangente tel que nous l'utilisons aujourd'hui. Voici les grandes lignes de sa démonstration pour arriver à sa formule :



Il considère le demi-cercle de rayon 1 tangent à l'axe Oy en O. Son équation s'écrit $y = \sqrt{2x - x^2}$.
Puisque :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$$

Il pose :

$$z = y - x\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

D'où :

$$x = \frac{2z^2}{1+z^2}$$

Sachant que l'aire d'un quart de cercle vaut $\pi/4$, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 y dx \\ &= \frac{1}{2}([x\sqrt{2x-x^2}]_0^1 + \int_0^1 z dx) \\ &= \frac{1}{2}[1 + (1 - \int_0^1 x dz)]\end{aligned}$$

C'est l'un des points les plus confus de sa démonstration. Les deux égalités précédentes se jusitifient par des considérations géométriques en tenant compte du fait que :

$$\int_0^1 x dz + \int_0^1 z dx = 1$$

Nous avons par la suite :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \int_0^1 \frac{z^2 dz}{1+z^2}$$

On reconnait une progression géométrique, d'où :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 1 - \int_0^1 z^2(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots)dz \\ &= 1 - \left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 - \ldots\right]_0^1\end{aligned}$$

En fin de compte :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

Pour en terminer, Leibniz et Gregory ne furent pas les seules à avoir découvert cette formule indépendamment. En effet, en 1682, Th. F. De Lagny avait lui aussi trouvé cette série[58]. Qui plus est, en posant $x = 1/\sqrt{3}$ dans le développement de arctangente, il obtint :

$$\frac{\pi}{6} = \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \ldots\right)$$

Avec les 9 premiers termes, on a une précision de 4 décimales. Th. F. De Lagny calcula 127 décimales de π en 1719 en utilisant cette série. Deux ans avant Abraham Sharp en avait calculé 72. Décidément, la formule de Leibniz-Gregory-De Lagny a eut beaucoup de succès. En réalité, elle fut découverte par la mathématicien Indien Mādhava(1340-1425) qui vécut près

de Cochin dans la région du Kérala(Sud-Ouest de l'Inde). La date de sa découverte demeure incertaine: 1403 ou 1418 [64][65].
Un regroupement astucieux des termes de cette formule apporte un résultat intéressant:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)-\dots\\ &= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+1}\right)\\ &= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{16n^2-1}\end{aligned}$$

D'où l'on tire:

$$\frac{1}{2}(1-\frac{\pi}{4})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-1}=\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{11\cdot 13}+\dots$$

Une autre possibilité de mettre à profit la fonction arctangente est le développement en fraction continue suivant:

$$\frac{\arctan x}{x}=\cfrac{1}{1+\cfrac{(1x)^2}{3+\cfrac{(2x)^2}{5+\cfrac{(3x)^2}{7+\cfrac{(4x)^2}{9+\cfrac{(5x)^2}{11+\cdots}}}}}}$$

En faisant $x=1$, nous obtenons:

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{(1)^2}{3+\cfrac{(2)^2}{5+\cfrac{(3)^2}{7+\cfrac{(4)^2}{9+\cfrac{(5)^2}{11+\cdots}}}}}}$$

qui se reconvertit aussi en la série:

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{3}{4}-\frac{5}{24}+\frac{7}{204}-\frac{9}{1408}+\frac{11}{10455}-\frac{13}{71484}+\frac{15}{478429}-\frac{17}{3148884}+\dots$$

13)

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

14)

$$\begin{aligned}\pi &= 2\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(2n-1)(n+1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{(2n+1)(n-1)} \\ \pi &= 4\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(2n+1)n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{(2n-1)n}\end{aligned}$$

La première formule converge vers π par voie inférieure tandis que l'autre converge par voie supérieure.

15)

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Cette formule fut trouvée par John Machin en 1706. Le calcul s'effectue en utilisant le développement en série de $\arctan x$:

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\pi}{4} = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)5^{2k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)239^{2k+1}}$$

La formule de Machin combine deux avantages. En effet, le second terme converge très vite tandis que le premier est pratique à calculer car il fait intervenir le chiffre 5. Ce mathématicien fut le premier à obtenir 100 décimales de π. Les formules qui suivirent par la suite pour calculer π, à la main et un peu par ordinateur, furent des variantes de la formule de Machin, et ce jusqu'en 1970.
Pour établir la formule, on part de l'identité suivante :

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} \tag{1}$$

En posant $v = -v$ dans (1), on obtient :

$$\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 - \tan u \tan v} \tag{2}$$

Et en faisant $v = u$ dans (1):

$$\tan 2u = \frac{2\tan u}{1 - \tan^2 u} \tag{3}$$

Soit $x = \arctan 1/5$. Ce qui fait que $\tan x = 1/5$. Remplaçons dans (3):

$$\begin{aligned} \tan 2x &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

De même:

$$\tan 4x = \frac{120}{119}$$

Sachant que $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, en utilisant la formule (2):

$$\begin{aligned} \tan\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan 4x - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan 4x \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} \\ &= \frac{1}{239} \end{aligned}$$

Etant donné que les angles de l'égalité précédente se trouvent tous dans le premier quadrant , il suffit de prendre l'arctangente des deux membres:

$$\begin{aligned} 4x - \frac{\pi}{4} &= \arctan \frac{1}{239} \\ 4\arctan\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4} &= \arctan \frac{1}{239} \end{aligned}$$

D'où:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Notons que pour calculer D décimales exactes, il faut sommer à peu près N termes tels que:

$$N = INT\left(\frac{D+1}{1.4}\right)$$

Historiquement, Reitweisner calcula 2037 décimales de π en 1949 sur le célèbre ENIAC(Electronic Numerical Integrator and Computer) en 70 heures[67] en utilisant la formule de Machin. En 1958, Genuys calcula 10000 décimales sur un IBM 704 en 100 minutes[68].

Les formules du type de celle de Machin sont nombreuses et existaient déjà bien avant. Le grand mérite de John Machin est d'en avoir découvert une avec des coefficients pertinents.

Parmi les variantes de ce type de formule, il y a par exemple :

– Leonhard Euler en 1764 :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{70} + \arctan\frac{1}{99}$$
$$\frac{\pi}{4} = 5\arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{3}{79}$$

Cette dernière formule permit au prodige du calcul que fut Euler de calculer 20 décimales de π en une heure. Tandis que la première permit à W. Rutherford de calculer 208 décimales[73]. On lui doit aussi cette formule pour tout entier n et m :

$$\arctan\frac{1}{n} = \arctan\frac{1}{n+m} + \arctan\frac{m}{n^2+nm+1}$$

Qui plus est, on doit à Euler d'avoir imposé la notation standard de π en 1737 bien que la première tentative fut attribuée au mathématicien gallois William Jones en 1706. Cependant, à l'origine, cette notation de π est due à Adrien Romanus (1561-1615) qui avait pris la première lettre du mot circonférence en grec : $\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\iota\alpha$. Ce dernier avait aussi calculé 17 décimales de π en 1593 en utilisant la méthode d'Archimède.

– Herman en 1706 :

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{7}$$

– Hutton en 1776 :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$
$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$$

En 1789 Vega(1754-1802) calcula 126 décimales avec cette dernière formule, et en 1794, 136 décimales.

– von Strassnitzky(1803-1852) en 1840 et Dahse(1824-1861) en 1844 [66]:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$$

Johann Dahse calcula 200 décimales de π avec cette formule.

– Carl Störmer en 1896 :

$$\frac{\pi}{4} = 3\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{20} + \arctan\frac{1}{1985}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 6\arctan\frac{1}{8} + 2\arctan\frac{1}{57} + \arctan\frac{1}{239} \\
\frac{\pi}{4} &= 10\arctan\frac{1}{22} + 7\arctan\frac{1}{41} + 12\arctan\frac{1}{75} + 2\arctan\frac{1}{4193} \\
\frac{\pi}{4} &= 44\arctan\frac{1}{57} + 7\arctan\frac{1}{239} + 12\arctan\frac{1}{682} + 24\arctan\frac{1}{12943} \\
\frac{\pi}{4} &= 88\arctan\frac{1}{172} + 51\arctan\frac{1}{239} + 32\arctan\frac{1}{682} \\
&+ 44\arctan\frac{1}{5357} + 68\arctan\frac{1}{12943}
\end{aligned}
$$

L'avant-dernière formule servit en 1961 à D. Shanks et J. Wrench [9] pour calculer 100 265 décimales en 8 heures sur un IBM 7090.

– Karl Friedrich Gauss :

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 12\arctan\frac{1}{18} + 8\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239} \\
\frac{\pi}{4} &= 12\arctan\frac{1}{38} + 20\arctan\frac{1}{57} + 7\arctan\frac{1}{239} + 24\arctan\frac{1}{268} \\
\frac{\pi}{4} &= 2085\arctan\frac{1}{5257} - 398\arctan\frac{1}{9466} + 1950\arctan\frac{1}{12943} \\
&+ 1850\arctan\frac{1}{34208} + 2021\arctan\frac{1}{44179} + 2097\arctan\frac{1}{85353} \\
&+ 1484\arctan\frac{1}{114669} + 1389\arctan\frac{1}{330182} + 808\arctan\frac{1}{485298}
\end{aligned}
$$

– A.A. Bennet en 1926 :

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{18} + 3\arctan\frac{1}{70} + 5\arctan\frac{1}{99} + 8\arctan\frac{1}{307}$$

– D.H. Lehmer en 1938 :

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{18} + 8\arctan\frac{1}{99} + 3\arctan\frac{1}{239} + 8\arctan\frac{1}{307}$$

(cf. [48])

– Klingstierna :

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 8\arctan\frac{1}{10} - \arctan\frac{1}{239} - 4\arctan\frac{1}{515} \\
\frac{\pi}{4} &= 8\arctan\frac{1}{10} - \arctan\frac{1}{100} - \arctan\frac{1}{515} - \arctan\frac{3583}{371498882}
\end{aligned}
$$

– Escott :

$$\frac{\pi}{4} = 22\arctan\frac{1}{28} + 2\arctan\frac{1}{443} - 5\arctan\frac{1}{1393} - 10\arctan\frac{1}{11018}$$

– C-.L. Hwang en 1997 :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 183\arctan\frac{1}{239} + 32\arctan\frac{1}{1023} - 68\arctan\frac{1}{5832} \\
&+ 12\arctan\frac{1}{110443} - 12\arctan\frac{1}{4841182} - 100\arctan\frac{1}{6826318}
\end{aligned}$$

Cette formule qui date de Mars 1997 est l'une des plus efficaces [54][55].

Il y en a bien d'autres parmi lesquelles :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 2\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{1}{13} \\
\frac{\pi}{4} &= 2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{9} - \arctan\frac{1}{32} \\
\frac{\pi}{4} &= 5\arctan\frac{1}{8} + 2\arctan\frac{1}{18} + 3\arctan\frac{1}{57} \\
\frac{\pi}{4} &= 6\arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{5}{99} - 3\arctan\frac{1}{268} \\
\frac{\pi}{4} &= 8\arctan\frac{1}{10} - 2\arctan\frac{2543}{452761} - \arctan\frac{1}{1393} \\
\frac{\pi}{4} &= 3\arctan\frac{1}{7} + 4\arctan\frac{1}{13} + 2\arctan\frac{1}{55} + 2\arctan\frac{1}{123} \\
\frac{\pi}{4} &= 10\arctan\frac{1}{17} + 2\arctan\frac{1}{38} + 7\arctan\frac{1}{41} - 4\arctan\frac{1}{157} \\
\frac{\pi}{4} &= 20\arctan\frac{1}{57} + 24\arctan\frac{1}{68} + 12\arctan\frac{1}{117} - 5\arctan\frac{1}{239} \\
\frac{\pi}{4} &= 68\arctan\frac{1}{99} - 12\arctan\frac{1}{117} + 39\arctan\frac{1}{239} \\
&+ 20\arctan\frac{1}{307} - 24\arctan\frac{1}{882} \\
\frac{\pi}{4} &= 95\arctan\frac{1}{239} + 44\arctan\frac{1}{515} + 32\arctan\frac{1}{682} \\
&+ 176\arctan\frac{1}{782} + 88\arctan\frac{1}{4030} + 112\arctan\frac{1}{12943} \\
\frac{\pi}{4} &= 44\arctan\frac{1}{515} + 95\arctan\frac{1}{538} + 127\arctan\frac{1}{682} \\
&+ 176\arctan\frac{1}{782} + 95\arctan\frac{1}{1068} + 88\arctan\frac{1}{4030} \\
&+ 17\arctan\frac{1}{12943}
\end{aligned}$$

Les nombres de Fibonacci peuvent aussi intervenir :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right),$$

où F_n représente le $n^{ième}$ nombre de la suite de Fibonacci.
Toutes ces formules se calculent en faisant appel à des notions issues de la Théorie des Nombres telles que les nombres premiers et les entiers gaussiens [41]. Pour en savoir plus sur ce type de formules, voir [4][5][6][7][8][9][47][56] ainsi que l'article original de Carl Störmer [40].
Cependant en faisant preuve d'un peu d'astuce comme Tadaaki Ohno(un étudiant en mathématique de l'Université de Tokyo) en Juillet 1999, on peut aboutir à des résultats intéressants à partir de la formule de la tangente d'une somme de deux angles:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

On pose $\tan a = 1/x$, $\tan b = 1/y$ de telle sorte que:

$$a + b = \arctan\frac{1}{x} + \arctan\frac{1}{y} = \arctan\frac{1}{z}$$

et $\tan(a+b) = 1/z$.
En remplaçant dans la formule de la tangente et en multipliant les deux membres par xy on obtient l'equation suivante:

$$(x-z)(y-z) = z^2 + 1$$

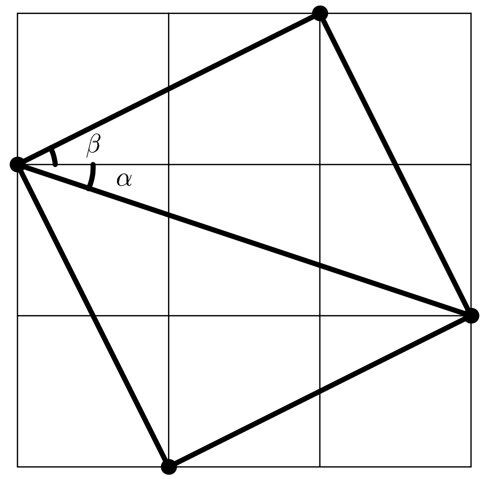
Par exemple pour $\arctan(1/z) = \pi/4$, c'est à dire $z = 1$, on a:

$$(x-1)(y-1) = 2$$

Une solution évidente est $x = 3$ et $y = 2$ Ce qui nous ramène à la formule de Hutton :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

Cette dernière s'illustre très bien graphiquement sur du papier quadrillé :



L'angle β a pour tangente $1/2$ et l'angle α a pour tangente $1/3$. La somme $\alpha + \beta$ vaut $\pi/4$: l'angle dont la tangente vaut 1.
En 1938 D.H. Lehmer a proposé une définition [48] pour mesurer l'efficacité des formules de type arctangente pour π. Les formules sont de la forme:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{N} a_n \arctan(b_n)$$

Si l'on suppose que l'arctangente est calculée par un développement de Taylor alors l'ordre de grandeur du calcul est proportionnel à:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\log_{10}(1/b_n)}$$

Ainsi la formule de Machin a une efficacité de Lehmer de l'ordre de 1.8511. Cette formule:

$$\frac{\pi}{4} = 22 \arctan \frac{1}{28} + \arctan \frac{1744507482180328366854565127}{98646395734210062276153190241239}$$

a une efficacité de Lehmer de l'ordre de 0.9014 alors que la formule de C-L. Hwang qui est connue pour être l'une des meilleures a une efficacité de 0.92061.

16)

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Cette formule est l'oeuvre de Leonhard Euler (1707-1783) et date de Décembre 1735. Cependant elle ne fut publiée qu'en 1740. C'est un cas particulier de la fonction zéta de Riemann [10] :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

où s appartient au corps des complexes.
Sur sa lancée, il découvrit une formule générale [11] donnant les valeurs de ζ pour tous les entiers positifs pairs :

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \ldots = (-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}B_{2k}\pi^{2k},$$

où les B_k sont les nombres de Bernoulli (Jacob Bernouilli (1654-1705)).
A titre indicatif, les premiers nombres sont :

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66}$$
$$B_{12} = -\frac{691}{2730},\ B_{14} = \frac{7}{6},\ B_{16} = -\frac{3617}{510},\ B_{18} = \frac{43867}{798},\ B_{20} = -\frac{174611}{330}$$
$$B_{22} = \frac{854513}{138},\ B_{24} = -\frac{236364091}{2730}, B_{26} = \frac{8553103}{6},\ B_{28} = -\frac{23749461029}{870}$$

et $B_3 = B_5 = B_7 = \ldots = 0$.
Pour en savoir plus sur l'obtention des nombres de Bernoulli, il faut consulter [12][63].
La manière dont Leonhard Euler parvint à ces formules est assez audacieuse [81]. Si l'on considère un polynôme $P(x)$ qui s'écrit :

$$P(x) = 1-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+a_4x^4-\ldots = (1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)(1-\alpha_3x)(1-\alpha_4x)\ldots$$

dont les racines sont $1/\alpha_1$, $1/\alpha_2$, $1/\alpha_3$, etc. Alors, d'après les identités de Viète, nous avons $a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots$.
Ensuite prennons le développement en série de $\sin x/x$:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

dont les racines sont $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, etc.
D'où l'écriture suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= (1-\frac{x}{\pi})(1+\frac{x}{\pi})(1-\frac{x}{2\pi})(1+\frac{x}{2\pi})(1-\frac{x}{3\pi})(1+\frac{x}{3\pi})\ldots \\ &= (1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})\ldots\end{aligned}$$

En reprennant le développement en série de $\sin x/x$, en faisant $X = x^2$ et en égalant avec le résultat qui précède, il vient :

$$1-\frac{X^2}{3!}+\frac{X^4}{5!}-\frac{X^6}{7!}+\ldots=\Big(1-\frac{X^2}{\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{X^2}{4\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{X^2}{9\pi^2}\Big)\ldots$$

Des identités de Viète nous en déduisons :

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+\ldots$$

D'où :

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Du point de vue de l'analyse cette démonstration manque de rigueur. Celle-ci sera apportée un peu plus tard grâce aux nombres complexes.
En 1748, Euler généralisa cette dernière formule. Ainsi dans son ouvrage *Introductio in Analysis Infinitorum* publié à Lausanne, on trouve une étonnante formule :

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

Notons au passage que si l'on fait $x=\pi/2$ dans cette formule, on parvient à retrouver la formule de Wallis.
Donc Euler pose :

$$1+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\ldots=(1+\alpha_1z)(1+\alpha_2z)(1+\alpha_3z)\ldots$$

Ici, z vaut x^2 dans la formule du développement de $\sin x$ en produit infini.
Ensuite, il définit les sommes :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots\\
S_2 &= \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2+\ldots\\
S_3 &= \alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+\alpha_4^3+\ldots\\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1\\
S_2 &= a_1S_1-2a_2\\
S_3 &= a_1S_2-a_2S_1+3a_3\\
S_4 &= a_1S_3-a_2S_2+a_3S_1-4a_4\\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

De ces formules et du développement du sinus, il en déduit :

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \ldots = (-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}B_{2k}\pi^{2k},$$

Dans ce même ouvrage, on trouve aussi un développement du cosinus en produit infini :

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right) = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots$$

Cela lui permet d'obtenir des formules du type :

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots \\ \frac{\pi^2}{96} &= 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \ldots \end{aligned}$$

La formule $\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2)$ est aussi célèbre sous une autre forme. En effet, la probabilité que deux entiers pris au "hasard" soient premiers entre eux (i.e. pas de facteurs communs) est $6/\pi^2$. C'est E. Cesaro qui a montré ce résultat en 1881. Il peut être utilisé pour calculer les décimales de π [36], mais ce n'est vraiment pas pratique.
Pour finir, un réarrangement loin d'être évident donne :

$$\frac{\pi^2}{6} = 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}$$

Ainsi que :

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{36}{17}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\binom{2n}{n}}$$

Cette dernière série a été découverte par Louis Comtet en 1974. Mais en 1979, Alfred J. Van der Poorten y apporta sa contribution [49] par le biais d'une remarquable intégrale :

$$\frac{17\pi^4}{6480} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\binom{2n}{n}} = \int_0^{\pi/3} x\ln^2\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx$$

N'oublions pas non plus ce remarquable résultat d'Euler qui ne fait intervenir que des nombres permiers :

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^3-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\ldots$$

C'est le point de départ pour la décomposition de la fonction zéta en produit eulérien que l'on trouve dans son ouvrage *Introductio in Analysis Infinitorum*:

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2^s})(1-\frac{1}{3^s})(1-\frac{1}{5^s})(1-\frac{1}{7^s})(1-\frac{1}{11^s})\dots}$$

La fonction zéta de Riemann permet d'autres acrobaties. Ainsi en partant de la série de Gregory-Leibniz-De Lagny-Mādhava, après un réarrangement astucieux [38], nous avons :

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{4^n}\zeta(n+1)$$

Ou en partant de l'identité :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right),$$

et en modifiant l'ordre de sommation, on parvient à :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}\zeta(4n+2)$$

Mais revenons un instant sur la décomposition de la fonction zéta en produit eulérien avec une notation plus compacte:

$$\zeta(s) = \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1-p^{-s}},$$

où p décrit la suite des nombres premiers et s appartient au champ complexe tel que $Re(s) > 1$.
En introduisant un entier n, nous avons:

$$\zeta(ns) = \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1-p^{-ns}} = \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1-p^{-s}} \cdot \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} p^{-ks}}$$

Qui s'écrit encore:

$$\zeta(ns) = \zeta(s) \cdot \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} p^{-ks}}$$

En utilisant des valeurs connues de $\zeta(ns)$, notamment avec le produit ns réel et paire, on trouve des formules telles que:

$$\frac{\pi^2}{15} \quad = \quad \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1-p^{-2}}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{691}{675675}\pi^6 &= \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1+p^{-6}} \\
\frac{2}{315}\pi^4 &= \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1+p^{-2}+p^{-4}} \\
\frac{2}{75}\pi^2 &= \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1-p^{-2}}{(1+p^{-2})^2} \\
\frac{5}{12}\pi^2 &= \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1+p^{-2}}{(1-p^{-2})^2} \\
\frac{4}{105}\pi^2 &= \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1-p^{-2}}{1+p^{-2}+p^{-4}} \\
\frac{2}{21}\pi^2 &= \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1+p^{-2}}{1+p^{-2}+p^{-4}} \\
\frac{2}{31185}\pi^8 &= \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1+p^{-2}+p^{-4}+p^{-6}+p^{-8}} \\
\frac{4}{6081075}\pi^{12} &= \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1+p^{-2}+p^{-4}+p^{-6}+p^{-8}+p^{-10}+p^{-12}},
\end{aligned}
$$

ou un peu plus excentriques:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{5} &= \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1-p^{-2}}{1+p^{-2}} \\
\frac{715}{691} &= \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1+p^{-6}}{1-p^{-6}} \\
\frac{1001}{3455} &= \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1-p^{-2}+p^{-4}}{(1+p^{-2})^2}
\end{aligned}
$$

Pour finir, Euler a aussi trouvé cette formule pour l'arctangente:

$$
\arctan x = \frac{x}{1+x^2}\left(1+\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3+\dots\right)
$$

En faisant $x = 1$, nous obtenons:

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\dots\right) \\
&= \left(1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{7}\left(1+\frac{4}{9}\left(1+\dots\right)\right)\right)\right)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

Cette formule est à l'origine d'un célèbre *C Obfuscated Code* écrit par Dik T. Winter du CWI(Centrum voor Wiskunde en Informatica) à Amsterdam:

```
int a=10000,b,c=8400,d,e,f[8401],g;main(){for(;b-c;)f[b++]=a/5;
for(;d=0,g=c*2;c-=14,printf("%.4d",e+d/a),e=d%a)for(b=c;d+=f[b]*a,
f[b]=d%--g,d/=g--,--b;d*=b);}
```

Ce petit programme de 158 caractère est capable de calculer 2400 décimales de π. C'est une preuve de plus que les décimales de π ne sont pas aléatoires, car au cas contraire il faudrait un programme d'une longueur d'au moins 2400 caractères.
Dans un langage C un peu plus académique le programme devient:

```
int i,j;
long result,ret=0,tmp,tab[8401];
void main()
{
 for (i=0;i<8401;i++) tab[i] = 2000;
 for (j=8400/14;j>0;j--) {
    result = 0;
    for (i=j*14;i>0;i--) {
       tmp = (result*i+tab[i]*10000);
       result = tmp/(2*i-1);
       tab[i] = tmp%(2*i-1);
    }
    printf("%.4d", ret+result/10000);
    ret = result%10000;
 }
}
```

Une version en PASCAL se trouve dans [84].

17)

$$\pi = 3\sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}$$

18)

$$\frac{2\pi\sqrt{3}+9}{27} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

19)

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

C'est un cas particulier de la formule :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s),$$

avec $s = 2$.

20)

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

C'est un cas particulier de la formule :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} = (1 - 2^{-s})\zeta(s),$$

avec $s = 2$.

21)

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \\[2ex] b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_{n+1}} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a_o = 2\sqrt{3} \\ b_o = 3 \end{cases}$$

Cette algorithme est dû à Pfaff et date de 1800. Pfaff fut l'un des enseignants de Karl Friedrich Gauss (1777-1855). L'algorithme est en fait la formalisation d'une technique élaborée par Archimède de Syracuse pour évaluer π par encadrement. Il s'agissait de calculer les périmètres d'un $6 \cdot 2^n$-gone inscrit et circonscrit à un cercle de diamètre 1. Grâce à un polygone de 96 côtés il montra que :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Plus tard au $V^{i\grave{e}me}$ siècle (vers 480) le chinois Tsu-Chung-Chih (430-501) encadra π avec 3072 côtés :

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927$$

Il en déduisit l'approximation bien connue 355/113.
En 1429, Al'Kashi qui vivait à Samarkande obtint 14 décimales avec un

polygone à 2832 côtés. Puis le mathématicien Ludolph Van Ceulen (1540-1610) utilisa la même technique avec un polygone de 2^{62} côtés($2^{62} = 4.6116 \;\, 10^{18}$). Il calcula π avec 35 décimales (il y passa une bonne partie de sa vie, et ces dernières furent gravées sur sa tombe)[69]. Cette technique fut légèrement améliorée par l'astronome-mathématicien hollandais Willebrod Snell Van Royen (1580 ou 1591-1626) qui réussit à accroître la précision de l'encadrement sans augmenter le nombre de côtés.
Ainsi, les a_n et b_n de l'algorithme de Pfaff encadre π et convergent linéairement vers π. La solution d'Archimède de Syracuse correspond à $n = 4$.
Formellement, il faut évaluer les deux demi-périmètres a_n et b_n d'un polygone à $N = 3 \cdot 2^{n-1}$ côtés :

$$\begin{cases} a_n = N \tan(\pi/N) \\ b_n = N \sin(\pi/N) \end{cases}$$

a_n représente le demi-périmètre du polygone circonscrit et b_n celui qui est inscrit.
D'où :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2N \tan(\pi/N) \\ b_{n+1} = 2N \sin(\pi/N) \end{cases}$$

De ces relations de récurrence il est aisé de déduire les moyennes harmoniques et géométriques :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} \\ \\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases}$$

22)

$$\begin{cases} \pi_n = \dfrac{4a_{n+1}^2}{1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} c_k^2} \\ \\ a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-1}) \\ b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} \\ c_n = a_{n-1} - a_n \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a_o = 1 \\ b_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n \geq 1 \end{cases}$$

C'est l'algorithme de Brent-Salamin qui date de 1976. Richard Brent et Eugène Salamin ont trouvé cet algorithme de manière indépendante

[13][14][51]. Celui-ci fait notamment appel à la moyenne arithmético-géométrique [15][16][17] et aux intégrales elliptiques [18]. En fait on devrait plutôt parler d'algorithme de Gauss-Brent-Salamin. En effet, en 1799, Karl Friedrich Gauss avait remarqué par le calcul que si l'on a :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a_o = 1 \\ b_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

alors :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{\pi}{2\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}}$$

Pour finir, ajoutons que cet algorithme converge de manière quadratique (2 décimales exactes à chaque itération).

23)

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} + \dfrac{1}{\sqrt{x_n}}) \quad (n \geq 0) \\ \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}}{y_n + 1} \quad (n \geq 1) \\ \\ \pi_n = \pi_{n-1}\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} x_o = \sqrt{2} \\ y_1 = \sqrt[4]{2} \\ \pi_o = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Cet algorithme est dû aux frères Borwein (Jonathan M. et Peter B.) de l'Université Simon Fraser à Burnaby (Canada), et remonte à 1984 [16][17]. Il converge quadratiquement. L'algorithme précédent est en fait un cas particulier et une approximation de celui-ci. Dans ce cas précis, π_n décroit vers π et nous avons la relation :

$$\pi_n - \pi < 10^{-2^{n+1}} \quad (n \geq 2)$$

Une implémentation en C et en FORTRAN se trouve dans [19]. Il existe un autre algorithme à convergence quadratique des mêmes auteurs:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1}(1+y_n)^2 - 2^n y_n \\ \\ y_n = \dfrac{1-\sqrt{1-y_{n-1}^2}}{1+\sqrt{1-y_{n-1}^2}} \end{cases}$$

avec $x_o = 1/2$ et $y_o = 1/\sqrt{2}$. Dans ce cas, x_n converge vers $1/\pi$.
Une implémentation en C++ se trouve sur `SimTel` ou l'un de ses miroirs. Par exemple `ftp://ftp.lip6.fr/pub/simtelnet/win3/math/piw131.zip`.
En 1985, les frères Borwein ont trouvé une formule qui converge vers $1/\pi$ de manière cubique [21] :

$$\begin{cases} r_{n+1} = \dfrac{3}{1+2(1-s_n^3)^{1/3}} \\ \\ s_{n+1} = \dfrac{r_{n+1}-1}{2} \\ \\ a_{n+1} = r_{n+1}^2 a_n - 3^n(r_{n+1}^2 - 1) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a_o = 1/3 \\ s_o = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) \end{cases}$$

Ainsi a_n tend vers $1/\pi$.
Ensuite ils parvinrent à un algorithme à convergence quartique (4 décimales exactes par itération)[17][24] :

$$\begin{cases} y_{n+1} = \dfrac{1-(1-y_n^4)^{1/4}}{1+(1-y_n^4)^{1/4}} \\ \\ a_{n+1} = (1+y_{n+1})^4 a_n - 2^{2n+3} y_{n+1}(1+y_{n+1}+y_{n+1}^2) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} y_o = \sqrt{2}-1 \\ a_o = 6-4\sqrt{2} \end{cases}$$

Celui-ci fut notamment utilisé par David H. Bailey en Janvier 1986 pour calculer 29 360 111 décimales de π sur un Cray-2 du NASA Ames Research Center [24]. En Janvier 1987, le japonais Yasumasa Kanada de l'Université de Tokyo calcula 2^{27} (134 217 728) décimales de π en utilisant un NEC SX2. Le calcul dura environ un jour et demi. En Janvier 1988, il récidiva avec 201 326 551 décimales [25][59] sur un Hitachi S-820 où cela ne prit que 6 heures. Selon toute vraissemblance, Y. Kanada détient toujours le record du nombre de décimales (51 539 600 000), établi avec son collègue Daisuke Takahashi entre le 6 et le 8 Juin 1997 et entre le 4 et le 6 Juillet 1997 pour être précis.
Voici un extrait de l'`e-mail` posté sur Internet:

```
From: kanada@pi.cc.u-tokyo.ac.jp (Yasumasa KANADA)
Subject: New world record of pi : 51.5 billion decimal digits

Dear pi people;

Now is the time for the announcement of new world record of pi. It
took longer time than our expectation.Nearly two years has passed
since we got new world record of 6.4 billion. Now, we got eight
times more record than 6.4 billion as the following texts which you
can get with anonymous ftp to 'www.cc.u-tokyo.ac.jp'

Computer Centre, University of Tokyo

Our latest record was established as follows:

Declared record: 51,539,600,000 decimal digits
Yasumasa and Daisuke TAKAHASHI
-----------------------------------------------------------------------

Two independent calculations based on two different algorithms
generated 51,539,607,552 (=3*2^34) decimal digits of pi and
comparison of two generated sequences matched 51,539,607,510
decimal digits, e.g., a 42 decimal digits difference.  Then we are
declaring 51,539,600,000 decimal digits as the new world record.
-----------------------------------------------------------------------

Main program run:
 Job start    : 6th June 1997 22:29:06
 Job end      : 8th June 1997 03:32:17
 Elapsed time : 29:03:11
 Main memory  : 212 GB
 Algorithm    : Borweins' 4-th order convergent algorithm.
-----------------------------------------------------------------------

Verification program run:
 Job start    : 4th July 1997 22:11:42
 Job end      : 6th July 1997 11:19:58
 Elapsed time : 37:08:16
 Main memory  : 188 GB
 Algorithm    : Gauss-Legendre algorithm (Brent-Salamin)
-----------------------------------------------------------------------

Optimized main program run:
 Job start    : 1st August 1997 23:04:15
 Job end      : 3rd August 1997 00:18:47
```

```
 Elapsed time : 25:14:32
 Main memory  : 212 GB
 Algorithm    : Borweins' 4-th order convergent algorithm
-----------------------------------------------------------------------

Machine used:
HITACHI SR2201 at the Computer Centre, University of Tokyo,
with 1024 Processors.
-----------------------------------------------------------------------

50,000,000,000-th digits of pi and 1/pi:
 pi : 85133 98712 75109 30042
 1/pi: 1191 08624 25640 78042
(First digit '3' for pi or '0' for 1/pi is not included in the
above count.)
-----------------------------------------------------------------------

Frequency distribution for pi-3 up to 50,000,000,000 decimal places:
 '0' : 5000012647; '1' : 4999986263; '2' : 5000020237; '3' : 4999914405
 '4' : 5000023598; '5' : 4999991499; '6' : 4999928368; '7' : 5000014860
 '8' : 5000117637; '9' : 4999990486;
 Chi square = 5.60
-----------------------------------------------------------------------

Frequency distribution for 1/pi up to 50,000,000,000 decimal places:
 '0' : 4999969955; '1' : 5000113699; '2' : 4999987893; '3' : 5000040906
 '4' : 4999985863; '5' : 4999977583; '6' : 4999990916; '7' : 4999985552
 '8' : 4999881183; '9' : 5000066450;
 Chi square = 7.04
-----------------------------------------------------------------------

51,539,600,000-th digits of pi and 1/pi
pi : 70532 46569 86142 12904
1/pi: 0081 50624 62192 72973

(First digit '3' for pi or '0' for 1/pi is not included in the
above count.)
-----------------------------------------------------------------------

Some interesting digit sequences

   0123456789 : from 17,387,594,880-th of pi
   0123456789 : from 26,852,899,245-th of pi
   0123456789 : from 30,243,957,439-th of pi
   0123456789 : from 34,549,153,953-th of pi
```

```
   0123456789 : from 41,952,536,161-th of pi
   0123456789 : from 43,289,964,000-th of pi

   9876543210 : from 21,981,157,633-th of pi
   9876543210 : from 29,832,636,867-th of pi
   9876543210 : from 39,232,573,648-th of pi
   9876543210 : from 42,140,457,481-th of pi
   9876543210 : from 43,065,796,214-th of pi

  09876543210 : from 42,321,758,803-th of pi
  27182818284 : from 45,111,908,393-th of pi

   0123456789 : from  6,214,876,462-th of 1/pi
  01234567890 : from 50,494,465,695-th of 1/pi
   9876543210 : from 15,603,388,145-th of 1/pi
   9876543210 : from 51,507,034,812-th of 1/pi
 999999999999 : from 12,479,021,132-th of 1/pi

(First digit '3' for pi or '0' for 1/pi is not included in the
above count.)
-----------------------------------------------------------------------

Programs were written by Mr. Daisuke TAKAHASHI, a Research
Associate at our Computer Centre.
Message passing routines were written by myself.

CPU used was  the HITACHI SR2201 at the Computer Centre,
University of Tokyo.
1024 PE's were definitely used through single job parallel
processing for total of two programs run.
-----------------------------------------------------------------------

Yasumasa KANADA
Computer Centre, University of Tokyo
Bunkyo-ku Yayoi 2-11-16
Tokyo 113 Japan
Fax   : +81-3-3814-7231 (office)
E-mail: kanada@pi.cc.u-tokyo.ac.jp
-----------------------------------------------------------------------
```

A propos de cet algorithme, notons que nous avons la relation :

$$0 < a_n - \frac{1}{\pi} < 16 \cdot 4^n e^{-2 \cdot 4^n \pi}$$

Une implémentation en C++ se trouve aussi dans le même fichier cité plus haut(`piw131.zip`).

Les premiers travaux des frères Borwein prennent leur source dans ceux de S. Ramanujan relatifs aux identités modulaires [1][5]. Il en résulte un algorithme qui converge de manière quintique vers $1/\pi$:

$$\begin{cases} s_{n+1} = \dfrac{25}{s_n(z + x/z + 1)^2} \\[2ex] x = \dfrac{5}{s_n} - 1 \\[2ex] y = (x-1)^2 + 7 \\[2ex] z = [\frac{1}{2}x(y + \sqrt{y^2 - 4x^3})]^{1/5} \\[2ex] a_{n+1} = s_n^2 a_n - 5^n \left[\dfrac{s_n^2 - 5}{2} + \sqrt{s_n(s_n^2 - 2s_n + 5)}\right] \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} s_o = 5(\sqrt{5} - 2) \\ a_o = 1/2 \end{cases}$$

et la relation :

$$0 < a_n - \frac{1}{\pi} < 16 \cdot 5^n e^{-5^n \pi}$$

Pour en terminer, il y en a un autre qui converge de manière 'nonique' (9 décimales exactes par itération) :

$$\begin{cases} t = 1 + 2r_n \\[2ex] u = [9r_n(1 + r_n + r_n^2)]^{1/3} \\[2ex] v = t^2 + tu + u^2 \\[2ex] m = \dfrac{27(1 + s_n + s_n^2)}{v} \\[2ex] s_{n+1} = \dfrac{(1 - r_n)^3}{v(t + 2u)} \\[2ex] r_{n+1} = (1 - s_n^3)^{1/3} \\[2ex] a_{n+1} = ma_n + 3^{2n-1}(1 - m) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} r_o = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) \\ s_o = (1-r_o^3)^{1/3} \\ a_o = 1/3 \end{cases}$$

24)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n)!^4(396)^{4n}}$$

Cette étonnante série est l'oeuvre de Srinivasa Ramanujan (1887-1920) et date de 1914 [1]. Cependant, elle ne fut exploitée qu'en 1985 par William Gosper de la société Symbolics Inc. . Il calcula par ordinateur 17 526 200 décimales. Chaque terme de la série ajoute 8 décimales exactes de π. On peut s'étonner qu'il se soit écoulé autant de temps entre l'établissement de cette formule et son utilisation. Néanmoins, il faut savoir que les travaux de Ramanujan ont été plus largement publiés que très récemment. C'est notamment le cas de ses fameux *Carnets* [20] grâce à G. Watson, B. Wilson et Bruce Berndt (NdR : ces carnets sont une vraie mine d'or!).
Il existe une autre écriture de cette série :

$$\frac{1}{\pi} = 2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{4})_n(\frac{1}{2})_n(\frac{3}{4})_n}{(1)_n(1)_n n!}(1103+26390n)\left(\frac{1}{99}\right)^{4n+2},$$

avec $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ et $a_o = 1$.
Derrière ce type de série, se cachent en fait des notions importantes du domaine des mathématiques telles que les fonctions modulaires, les fonctions elliptiques et les champs quadratiques et imaginaires.
Ramanujan, malgré sa courte vie, fut un mathématicien prolifique et prodigieux. Il était entre autre fasciné par π. Le nombre de formules qu'il trouva pour calculer cette constante est énorme. En voici un florilège qui n'est évidemment pas exhaustif :
Commençons par des approximations :

–

$$\pi \approx \frac{19\sqrt{7}}{16} = 3,14182\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{7}{3}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{5}\right) = 3,14162\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}} = 3,14164\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{12}{\sqrt{130}} \ln \left[\frac{(3+\sqrt{13})(\sqrt{8}+\sqrt{10})}{2} \right] = 3,141593\ldots$$

–

$$\pi \approx (1.09999901) \cdot (1.19999911) \cdot (1.39999931) \cdot (1.69999961) = 3,14159257\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{99^2}{1103} = 3,141592731\ldots$$

–

$$\pi \approx 2 + \sqrt{1 + \left(\frac{413}{750}\right)^2} = 3,141592649\ldots$$

–

$$\pi \approx \left(97 + \frac{9}{22}\right)^{1/4} = 3,1415926526\ldots$$

–

$$\pi \approx \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} = \left(102 - \frac{2222}{22^2}\right) = 3,1415926526\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{63}{25} \left(\frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}} \right) = 3,141592655\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{355}{113}(1 - \frac{0.0003}{3533}) = 3,1415926535897943\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{\ln(5280^3 + 744)}{\sqrt{67}} = 3,14159265358979431\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{\ln(640320^3 + 744)}{\sqrt{163}} = 3,14159265358979431\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{24}{\sqrt{142}} \ln \left[\frac{\sqrt{10+11\sqrt{2}} + \sqrt{10+7\sqrt{2}}}{2} \right] = 3,14159265358979313\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{12}{\sqrt{190}} \ln \left[(3+\sqrt{10})(\sqrt{8}+\sqrt{10}) \right] = 3,14159265358979323819\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{12}{\sqrt{190}} \ln \left[\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})(2+\sqrt{2})(5+2\sqrt{10}+\sqrt{61+20\sqrt{10}}) \right]$$
$$= 3,141592653589793238462 6420\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{4}{\sqrt{522}} \ln \left[\left(\frac{5+\sqrt{29}}{\sqrt{2}} \right)^3 \left(5\sqrt{29}+11\sqrt{6} \right) \left(\sqrt{\frac{9+3\sqrt{6}}{2}} + \sqrt{\frac{5+3\sqrt{6}}{2}} \right)^6 \right]$$
$$= 3,141592653589793238462643383279 43\ldots$$

Et pour ce qui est des séries :

–

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n+5}{2^{12n+4}}$$

–

$$\frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi}[\Gamma(3/4)]^2} = 1 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4 + 25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4 + \ldots,$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma d'Euler [43] sachant que $\Gamma(3/4) = 0.919062527\ldots$

–

$$\frac{4}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n+1)(\frac{1}{2})_n^3}{4^n (n!)^3}$$

–

$$\frac{16}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(42n+5)(\frac{1}{2})_n^3}{64^n (n!)^3}$$

–

$$\frac{2\sqrt{3}}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+8n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{9^n (n!)^3}$$

–

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+10n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{9^{2n+1} (n!)^3}$$

–

$$\frac{1}{3\pi\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+40n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{49^{2n+1}(n!)^3}$$

–

$$\frac{2}{\pi\sqrt{11}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(19+280n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{99^{2n+1}(n!)^3}$$

–

$$\frac{4}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(3+20n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{2^{2n+1}(n!)^3}$$

–

$$\frac{4}{\pi\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(3+28n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{3^n4^{n+1}(n!)^3}$$

–

$$\frac{4}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(23+260n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{18^{2n+1}(n!)^3}$$

–

$$\frac{4}{\pi\sqrt{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(41+644n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{5^n72^{n+1}(n!)^3}$$

–

$$\frac{4}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(1123+21460n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{882^{2n+1}(n!)^3}$$

–

$$\frac{27}{4\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+15n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{3})_n(\frac{2}{3})_n}{(n!)^3}\left(\frac{2}{27}\right)^n$$

–

$$\frac{15\sqrt{3}}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4+33n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{3})_n(\frac{2}{3})_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n$$

–

$$\frac{5\sqrt{5}}{2\pi\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+11n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{6})_n(\frac{5}{6})_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n$$

–

$$\frac{85\sqrt{85}}{18\pi\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8+133n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{6})_n(\frac{5}{6})_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{85}\right)^n$$

–

$$\frac{32}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}(5+42n)-1+30n)(\frac{1}{2})_n^3}{64^n(n!)^3}\phi^{-8n}$$

où ϕ est le Nombre d'Or valant $(1+\sqrt{5})/2$.

Pour en savoir plus sur Ramanujan, le mieux est de consulter sa biographie [42], ainsi que l'autobiographie du mathématicien G.H. Hardy [62].

25)

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(6n)!}{(3n)!(n!)^3}\frac{13591409+545140134n}{(640320^3)^{n+1/2}}$$

Cette formule est due aux frères Chudnowsky (David et Gregory) et date de 1989 [26]. Chaque terme de la série ajoute 14 décimales exactes. Elle s'inspire des formules trouvées par S. Ramanujan. En Mai 1994, cette série permit de calculer 4 044 000 000 décimales de π sur un super-ordinateur de leur fabrication. Tout le côté anecdotique de cette histoire nous est raconté dans un article du *New Yorker* [44]. Une autre formule de leur cru sert à calculer la constante π dans le logiciel de calcul formel *Mathematica* [45][72].

26)

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(6n)!(A+Bn)}{C^{n+1/2}(3n)!(n!)^3},$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= 212175710912\sqrt{61}+1657145277365 \\ B &= 13773980892672\sqrt{61}+107578229802750 \\ C &= [5280(236674+30303\sqrt{61})]^3 \end{aligned}$$

Cette énorme série est le fait des frères Borwein [46] et date de 1989. Chaque terme de la série ajoute 25 décimales exactes. Nul besoin de vous préciser qu'à ce stade, il est impensable de faire usage de la multiplication classique. Compte tenu des très grands nombres mis en jeu, on fait plutôt appel à des Transformées de Fourier Rapides (FFT) [24][27] ou à l'arithmétique modulaire. Ceci vaut pour presque toutes les formules utilisées après les années

70.
Dans le même esprit, il y a des séries avec des coefficients encore plus importants :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{-12C}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{6})_n (\frac{3}{6})_n (\frac{5}{6})_n}{(n!)^3} \frac{A+Bn}{C^n},$$

avec :

$$\begin{aligned}
A = {} & 5280419026080999965452185 + 2361475178400070170568880\sqrt{5} \\
& +32\sqrt{5}(1089172855117117820046743621239520916038565600\!17 \\
& +48709290865788102250773385345416887213512550\!40\sqrt{5})^{1/2} \\
B = {} & 654159204458052267524145750 + 292548889855077669080467200\sqrt{5} \\
& +209664\sqrt{3110}(6260208323789001163699332265444402088216\!1 \\
& +2799650273060444296577206890718825190235\sqrt{5})^{1/2} \\
C = {} & -[17897749588626020 + 8004116944887336\sqrt{5} \\
& +108\sqrt{5}(10985234579463550323713318473 \\
& +4912746253692362754607395912\sqrt{5})^{1/2}]^3
\end{aligned}$$

Chaque terme de cette série ajoute 50 décimales exactes.

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{3C}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{6})_n (\frac{3}{6})_n (\frac{5}{6})_n}{(n!)^3} \frac{A+Bn}{C^n},$$

avec :

$$\begin{aligned}
A = {} & 21242668516504965 + 15020834958518500\sqrt{2} \\
& +2\sqrt{5}(45125096427586568251645610141659 \\
& +31908261685643312902173585434250\sqrt{2})^{1/2} \\
B = {} & 1839779353703421900 + 1300920456890691000\sqrt{2} \\
& +24337404\sqrt{10}(114291247671302449666\!7 + 80816116258649170575\!0\sqrt{2})^{1/2} \\
C = {} & [71864175655 + 22725423252\sqrt{10} + 2808\sqrt{5}(261993316778681 \\
& +82849561276216\sqrt{10})^{1/2}]^3
\end{aligned}$$

Chaque terme de cette série ajoute 34 décimales exactes.

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4})_n (\frac{2}{4})_n (\frac{3}{4})_n}{(n!)^3} \frac{A+Bn}{C^{2n+1}},$$

avec :

$$
\begin{aligned}
A = {} & [4521962731044058367634998271455136035/4 \\
& +7993776278485234586059121251125632 34\sqrt{2} \\
& +12(177501275529092352030123773691820793452753907811908738706564912610572 19 \\
& +12551235559588298842368399044760792518264086163743871981876343032585 34\sqrt{2})^{1/2}]^{1/2} \\
B = {} & [961776139508895348591544409130763 6106000 \\
& +680078430230158868661625397342978215 4400\sqrt{2} \\
& +52003425600\sqrt{2}(3420456658672290315173107253751646913664067204719883059 2963 \\
& +24186280981018566606552309811255775851849456510216830399522\sqrt{2})^{1/2}]^{1/2} \\
C = {} & 1670141896514232075 + 1180968660568974600\sqrt{2} \\
& +2736\sqrt{2}(3726272018650177463417915646 03 + 2634872212933225771559515148 50\sqrt{2})^{1/2}
\end{aligned}
$$

Chaque terme de cette série ajoute 37 décimales exactes.

27)

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!},$$

avec $n!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots$.
Cette série d'Euler(cf. 16) est intéressante car elle inaugure une nouvelle ère dans le calcul de π. Elle peut se réécrire d'une autre façon(à la Hörner!) :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3}(1 + \frac{2}{5}(1 + \frac{3}{7}(1 + \frac{4}{9}(1 + \ldots))))$$

Il en est fait usage dans les algorithmes comptes-gouttes(spigot algorithms) [30]. Ces derniers n'utilisent que des entiers pour le calcul [28][29]. Chaque décimale de π calculée est exacte. Cette technique est implémentable sur n'importe quel ordinateur dans la mesure où il n'est pas utile de faire des calculs en multiprécision. Cette découverte pour π, qui date de 1990, est due à Stanley Rabinowitz et Stan Wagon. Un code en PASCAL se trouve dans [30].

28)

$$
\begin{aligned}
\pi = 3 + \frac{1}{60}8 + \frac{1}{60}\cdot\frac{2\cdot 3}{7\cdot 8\cdot 3}13 + \frac{1}{60}\cdot\frac{2\cdot 3}{7\cdot 8\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{10\cdot 11\cdot 3}18 \\
+ \frac{1}{60}\cdot\frac{2\cdot 3}{7\cdot 8\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{10\cdot 11\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 7}{13\cdot 14\cdot 3}23 + \ldots
\end{aligned}
$$

Cette formule fut découverte par William Gosper en 1974 [31][50] en usant subtilement de la transformation d'Euler sur la formule de Gregory-Leibniz-De Lagny-Mādhava(cf. 12). Elle peut alors se réécrire à la Hörner :

$$\pi = 3 + \frac{1}{60}(8 + \frac{2\cdot 3}{7\cdot 8\cdot 3}(13 + \frac{3\cdot 5}{10\cdot 11\cdot 3}(18 + \frac{4\cdot 2}{13\cdot 14\cdot 3}(23 + \cdots))))$$

Dans le même esprit, il y a la série :

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \frac{1}{11 \cdot 3^5} + \ldots,$$

qui devient :

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{3}(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}(\frac{1}{11} - \ldots)))))$$

Il y a aussi la série de Ryōhitsu Matsunaga qui date de 1739 :

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1^2}{4 \cdot 6} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \ldots,$$

qui devient :

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{4 \cdot 6}(1^2 + \frac{1}{8 \cdot 10}(1^2 \cdot 3^2 + \frac{1}{12 \cdot 14}(1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 + \frac{1}{16 \cdot 18}(\cdots))))$$

avec laquelle il calcula 50 décimales de π.
Pour finir, on doit aussi a Gosper ce produit matriciel:

$$\prod_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} P(n) & 48(n + \frac{41}{21}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 15\pi + 32 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec:

$$P(n) = \frac{(n - \frac{5}{2})(n + \frac{3}{2})(n + 3)(n + \frac{7}{2})}{64(n + \frac{3}{4})(n + \frac{5}{4})(n + \frac{9}{4})(n + \frac{11}{4})}$$

Et dans le même esprit, il y a:

$$\prod_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} P(n) & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pi + 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec:

$$P(n) = \frac{2(n - \frac{1}{2})(n + 2)}{27(n + \frac{3}{2})(n + \frac{4}{3})}$$

29)

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}(\frac{4}{8n + 1} - \frac{2}{8n + 4} - \frac{1}{8n + 5} - \frac{1}{8n + 6})$$

Cette formule résulte du travail conjoint de David Bailey, Peter Borwein et Simon Plouffe(BBP). Sa découverte remonte exactement au 19 Septembre 1995 à 0h29 [33]. Dans la voie ouverte par les algorithmes comptes-gouttes, cette formule permet de calculer n'importe quelle décimale de π en base 16

sans avoir besoin de calculer les décimales précédentes. Ce qui est étonnant, c'est que cette formule aurait pu être découverte bien plus tôt (à l'époque d'Euler!) dans la mesure où elle ne comporte pas d'écueils mathématiques insurmontables. En voici la preuve :
Pour tout $k < 8$ nous avons :

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^k}dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} dx \sum_{n=0}^{\infty} x^{k-1+8n} = \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(8n+k)}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\Big(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\Big)$$
$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}dx$$

En faisant le changement de variable $y = \sqrt{2}x$, il vient :

$$\int_0^1 \frac{16y-16}{y^4-2y^3+4y-4}dy = \int_0^1 \frac{4y}{y^2-2}dy - \int_0^1 \frac{4y-8}{y^2-2y+2}dy$$

Il suffit ensuite d'établir que le second membre de l'égalité vaut π en faisant au préalable une décomposition en fractions rationnelles des intégrandes.
Ainsi grâce à la formule BBP, Simon Plouffe annonça sur le newsgroup `sci.math` (le 5 Octobre 1995 à 23 h 05 min 57 s GMT pour être précis!) que le 10 milliardième chiffre hexadécimal des décimales de π est : `9`. Ce qui veut dire que le 40 milliardième chiffre binaire des décimales de π est `1`.
Voici un extrait de l'`e-mail` posté sur le groupe de discussion `sci.math`:

```
From: Simon Plouffe <plouffe@cecm.sfu.ca>
Newsgroups: sci.math
Subject: The 40 billion'th binary digit of Pi is 1
Date: 5 Oct 1995 23:20:57 GMT
Organization: CECM


THE TEN BILLIONTH HEXADECIMAL DIGIT of Pi is 9

By:  Simon Plouffe, Peter Borwein and David Bailey.

The following is part of a paper titled "On The Rapid Computation of
Various Polylogarithmic Constants".  The full text, as well as
Fortran code, is available in
```

http://www.cecm.sfu.ca/~pborwein/

as P123 under the link "Computing Pi and Related Matters".

ABSTRACT:

We give algorithms for the computation of the d-th digit of certain transcendental numbers in various bases. These algorithms can be easily implemented (multiple precision arithmetic is not needed), require virtually no memory, and feature run times that scale nearly linearly with the order of the digit desired. They make it feasible to compute, for example, the billionth binary digit of log(2) or pi on a modest work station in a few days run time.

Indeed we computed the 10 billionth hexadeximal digit of pi as well as the billionth hexadecimal digits of pi^2, log(2) and log^2(2), the billionth decimal digit of log (9/10) and the five billionth decimal digit of log(1 - 10^{-96}).

These calculations rest on three observations. First, the d-th digit of 1/n is "easy" to compute. Secondly, this scheme extends to certain polylogarithm and arctangent series. Thirdly, very special types of identities exist for certain numbers like pi, pi^2, log(2) and log^2(2). These are essentially polylogarithmic ladders in an integer base. A number of these identities that we derive in this work appear to be new, for example the critical identity for the binary digits of pi is:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} 16^{(-n)} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

##

Various strings of output are given below. The fourth entry, for example, gives the 10^10-th through 10^10+13-th hexadecimal digits of

```
pi after the "decimal" point. Converting this to base two gives the
folowing string of binary "digits" of pi starting at the 40 billionth
place:

10010010000111000111001111000110100000111000111110110010...


CONSTANT:  BASE:  POSITION: DIGITS FROM POSITION:

 pi         16     10^6      26C65E52CB4593
                   10^7      17AF5863EFED8D
                   10^8      ECB840E21926EC
                   10^9      85895585A0428B
                   10^10     921C73C6838FB2


log(2)      16     10^6      418489A9406EC9
                   10^7      815F479E2B9102
                   10^8      E648F40940E13E
                   10^9      B1EEF1252297EC


pi^2        16     10^6      685554E1228505
                   10^7      9862837AD8AABF
                   10^8      4861AAF8F861BE
                   10^9      437A2BA4A13591

log^2(2)    16     10^6      2EC7EDB82B2DF7
                   10^7      33374B47882B32
                   10^8      3F55150F1AB3DC
                   10^9      8BA7C885CEFCE8


log(9/10)    10    10^6      80174212190900
                   10^7      21093001236414
                   10^8      01309302330968
                   10^9      44066397959215
```

Les auteurs de la formule BBP ont aussi découvert d'autres formules de ce type [34], parmi lesquelles :

$$\pi^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\Big(\frac{16}{(8n+1)^2} - \frac{16}{(8n+2)^2} - \frac{8}{(8n+3)^2} - \frac{16}{(8n+4)^2} - \frac{4}{(8n+5)^2} - \frac{4}{(8n+6)^2} + \frac{2}{(8n+7)^2}\Big)$$

et :

$$\pi^2 = \frac{9}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{64^n}\Big(\frac{16}{(6n+1)^2}-\frac{24}{(6n+2)^2}-\frac{8}{(6n+3)^2}-\frac{6}{(6n+4)^2}+\frac{1}{(6n+5)^2}\Big)$$

Comme l'a si bien fait remarquer Robert Harley de l'INRIA:
Mais pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué.
En effet il montre qu'en posant:

$$x = \frac{1-i}{2}$$

dans le développement de Taylor de:

$$l = \ln(1-x) = \ln\frac{1+i}{2}$$

la partie imaginaire de l est $\pi/4$ avec le développement:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Sachant que $x^8 = 1/16$, nous avons:

$$\begin{aligned} l &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\Big(\frac{x}{8n+1}+\frac{x^2}{8n+2}+\frac{x^3}{8n+3}+\frac{x^4}{8n+4}+\frac{x^5}{8n+5} \\ &+ \frac{x^6}{8n+6}+\frac{x^7}{8n+7}+\frac{x^8}{8n+8}\Big) \end{aligned}$$

Qui plus est $x^2 = \frac{-i}{2}$, $x^3 = -\frac{(1+i)}{4}$, $x^4 = -\frac{1}{4}$, $x^5 = \frac{-1+i}{8}$, $x^6 = \frac{i}{8}$ et finalement $x^7 = \frac{1+i}{16}$.
Ce qui fait que la partie imaginaire de l vaut:

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\Big(\frac{-1/2}{8n+1}+\frac{-1/2}{8n+2}+\frac{-1/4}{8n+3}+\frac{1/8}{8n+5}+\frac{1/8}{8n+6}+\frac{1/16}{8n+7}\Big)$$

D'où:

$$\pi = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\Big(\frac{8}{8n+1}+\frac{8}{8n+2}+\frac{4}{8n+3}-\frac{2}{8n+5}-\frac{2}{8n+6}-\frac{1}{8n+7}\Big)$$

Ainsi les formules du type 'BBP' s'obtiennent facilement sans faire appel à des intégrales. En fait, il s'agit d'un cas particulier d'une méthode plus générale. Si l'on prend z une racine n^{ieme} de l'unité et b une base, alors en posant $x = z/b$ les coefficients a_i de:

$$\ln(1-x) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_r z^r,$$

avec $r = \phi(n) - 1$, apparaissent en base b.
NB: $\phi(n)$ désigne la fonction d'Euler ou fonction *totient* qui donne le nombre d'entiers inférieurs à n qui ne possèdent pas de facteur commun avec lui.

30)

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4+8r}{8n+1} - \frac{8r}{8n+2} - \frac{4r}{8n+3} - \frac{2+8r}{8n+4} - \frac{1+2r}{8n+5} - \frac{1+2r}{8n+6} + \frac{r}{8n+7}\right)$$

où r est réel ou complexe.
Cette formule est due à Victor Adamchik de *Wolfram Research Inc.* et Stan Wagon [34]. Elle date de Janvier 1996. En prennant $r = 0$, on retrouve la formule BBP. Adamchik et Wagon ont aussi établit d'autres formules. Par exemple :

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{2}{8n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1/2}{4n+5} - \frac{1/2}{4n+6} - \frac{1/4}{4n+7}\right)$$

qui s'écrit de façon plus compacte :

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\left(\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3}\right)$$

Il y a aussi :

$$\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{-12}{n+1} + \frac{384}{n+2} + \frac{45/2}{2n+1} - \frac{1215/2}{2n+3}\right)$$

et :

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{-238}{n+1} + \frac{285/2}{2n+1} - \frac{667/32}{4n+1} - \frac{5103/16}{4n+3} + \frac{35625/32}{4n+5}\right)$$

A propos de ce type de formules, que l'on peut appeler type BBP, une interrogation demeure. En effet, existe-t-il une formule qui donnerait les décimales de π en base 10 ? D'une manière plus formelle, existe-t-il deux polynômes P et Q à coefficients entiers tels que :

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}\left(\frac{1}{10}\right)^n ?$$

Un aspect technique très intéressant de ce type de formule est qu'elle est fortement parallèlisable comme en témoigne le projet *PiHex*:
(`http://www.cecm.sfu.ca/projects/pihex`).

31)

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{1}{2^6}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10n}}\left(-\frac{2^5}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \frac{2^8}{10n+1} - \frac{2^6}{10n+3} - \frac{2^2}{10n+5}\right.\\ &\left. - \frac{2^2}{10n+7} + \frac{1}{10n+9}\right)\end{aligned}$$

Cette formule fut trouvée par Fabrice Bellard de l'IRISA (Rennes) le 20 Janvier 1997. Elle est 43% plus rapide que la formule BBP. Cette nouvelle a fait l'objet d'un article dans le journal *Le Monde* [83]. Fabrice Bellard s'était déjà illustré, le 7 Octobre 1996, en calculant la 100 milliardième décimale de π en base 16 : `9C381872D27596F81D0E48B95A6C46` ; ce qui fait que le 400 milliardième chiffre binaire de π vaut `1`.
Voici un extrait de l'`e-mail` posté sur le groupe de discussion `sci.math`:

```
From: bellard@vouvray.enst.fr (Fabrice Bellard)
Subject: 100 billionth hexadecimal digits of PI
Newsgroups: sci.math
Date: 7 Oct 1996 11:01:43 GMT
Organization: Acces regional Ile-de-France (Univ. Paris VI/VII) - France

The 100 billionth (10^11) hexadecimal digits of PI are :

9C381872D27596F81D0E48B95A6C46

This calculus has been done and verified during the idle time of nine
workstations. I have used the results of the paper "On the rapid
computation of various polylogarithmic constants" by David Bailey,
Peter Borwein and Simon Plouffe.

--
Fabrice Bellard - Fabrice.Bellard@enst.fr
```

On lui doit aussi cette formule :

$$\pi = \frac{1}{740025}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3P(n)}{2^{n-1}\binom{7n}{2n}} - 20379280\right)$$

avec :

$$\begin{aligned} P(n) &= -885673181n^5 + 3125347237n^4 - 2942969225n^3 + 1031962795n^2 \\ &- 196882274n + 10996648 \end{aligned}$$

32) Formules Linguistiques :
Ce sont les moyens mnémotechniques qui permettent de retenir quelques décimales dans divers langues en comptant le nombre de lettre de chaque mots.

En Français :

- `Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages.`
  `Immortel Archimède, artiste, ingénieur,`
  `Qui de ton jugement peut priser la valeur ?`
  `Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.`
- En voici une autre version composée par François Sholder de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

  `Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages.`
  `Glorieux Archimède, artiste, ingénieux !`
  `Toi de qui Syracuse aime encore la gloire.`
  `Soit ton nom conservé par de savants grimoires.`

En Anglais :

- `May I have a large container of coffee?`
  cf. [60].
- En voici un attribué à Sir James Jeans(1877-1946) [60][61].

  `How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics.`
- `How I wish I could enumerate Pi easily, since all these horrible mnemonics prevent recalling any of pi's sequence more simply.`
- `See, I have a rhyme assisting my feeble brain, its tasks sometimes resisting.`

En Espagnol :

- `Sol y Luna y cielo proclaman al divino autor del cosmo.`

En Portuguais :

- `Sim, é'util e fácil memorizar um n'ugrato aos sábios.`
- `Sou o medo e temor constante do menino vadio.`

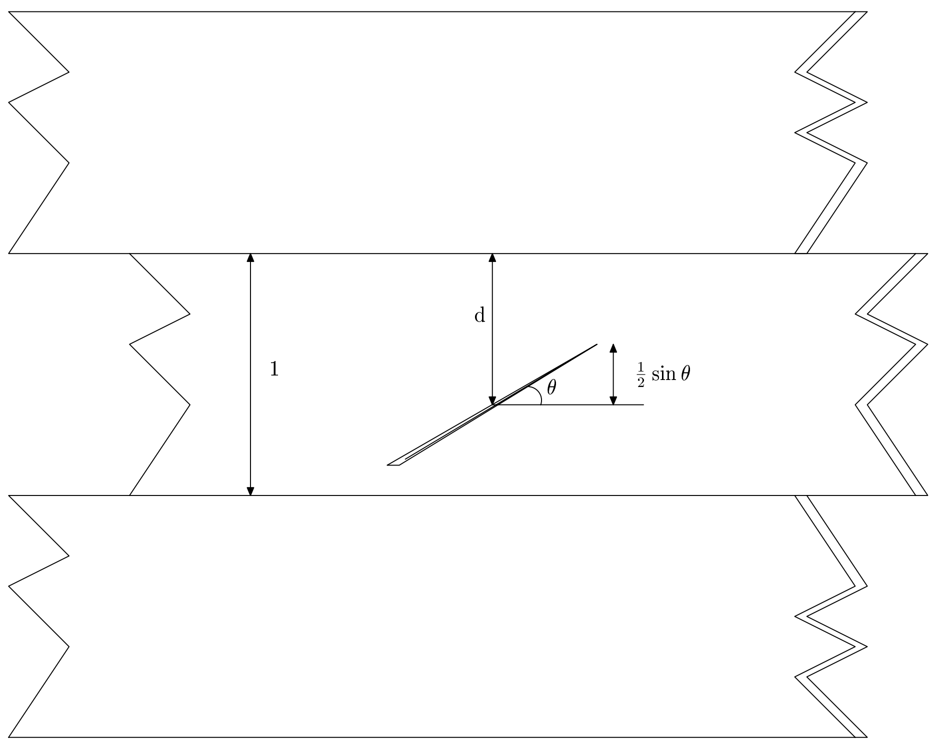
En Danois :

- `Eva, o lief, o zoete hartedief uw blauwe oogen zyn wreed bedrogen.`

En Albanais :

– `Kur e shoh e mesoj sigurisht.`

33) Les aiguilles de Buffon:
En 1777 le comte de Buffon(1707-1738), avant tout connu en tant que naturaliste, imagine une méthode probabiliste pour calculer π[74][76][78]. A l'origine, elle consiste à lancer des aiguilles de longueur l sur un parquet muni de latte de largeur L, sachant que la probabilité qu'une aiguille coupe le bord d'une latte est $2/\pi$.
Pour simplifier, prennons L et l égals à l'unité:

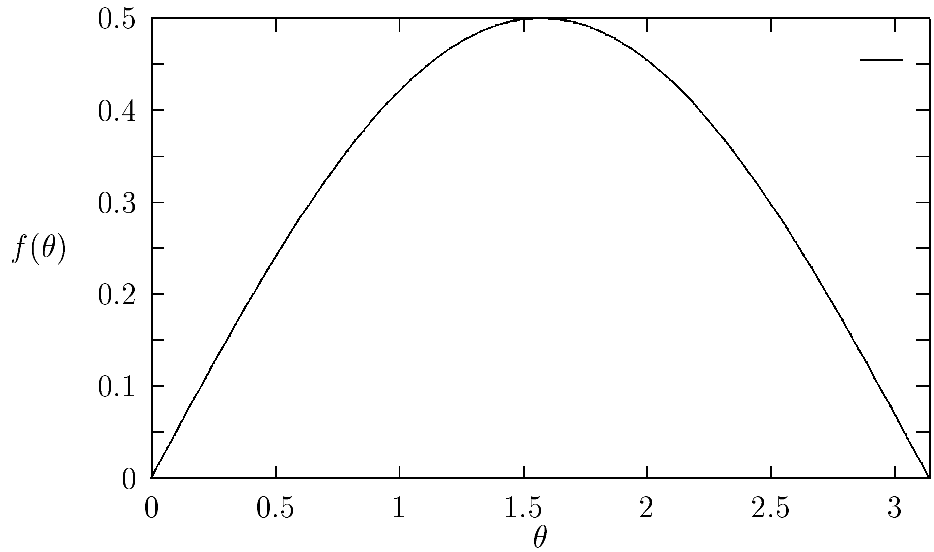


Si l'on note d la distance la plus proche entre le centre de l'aiguille et le bord d'une latte, alors celle-ci coupera un bord à condition que:

$$d \leq \frac{1}{2}\sin\theta$$

Toutes les valeurs possibles prisent par d pour que l'aiguille coupe un bord se situent donc sur et sous la courbe:

$$f(\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta, \quad avec \ \ \theta \in [0, \pi]$$



La probabilité P de couper un bord sera le rapport entre l'aire sous la courbe et l'aire du rectangle de longueur π et de largeur $1/2$.

$$P = \frac{\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin\theta d\theta}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

En fin de compte, pour évaluer π(avec grande difficulté[77]) on lance des aiguilles et l'on a:

$$\pi \approx 2\frac{Nombre\ \ total\ \ de\ \ lanc\acute{e}s}{Nombre\ \ d'aiguilles\ \ coupant\ \ un\ \ bord}$$

En généralisant un peu avec la restriction $l < L$(le cas $L < l$ est un peu complexe car une aiguille peut alors couper deux bords de latte[75]), nous avons la probabilité $P(l, L)$ qui vaut:

$$P(l, L) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\frac{l\sin\theta}{L} = \frac{2l}{\pi L}$$

Il existe une variante que l'on nomme aiguille de Buffon-Laplace. Cette fois-ci, on lance des aiguilles de longueur l sur un parquet avec des dalles rectangulaires de côté a et b. Si $l > a, b$ alors:

$$P(l, a, b) = \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}$$

Pour finir, en 1740, Buffon a traduit le fameux traité de Newton *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum*(Méthode des Fluxions et des Suites Infinies).

Voilà c'est tout pour cette fois.

1 Bibliographie.

- [1] S. Ramanujan, *Modular equations and approximation to* π, Quat. Journ. Math.(Oxford) 45, 1914, pp350-372.

- [2] S. Ramanujan, *Notebooks*(2 volumes), Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.

- [3] F. Scheid, *Analyse Numérique*, Série Schaum, Edition Mac Graw-Hill, 1987, p75, p79 et p162.

- [4] *Arctangent formulas for* π, Center for advanced Computing Research, California Institute of Technology(Caltech).

- [5] J.M. Borwein, P.B. Borwein, *Pi and the AGM : A study in analytic number theory and computational complexity*, New-York, Edition Wiley and Sons,1987.

- [6] H. Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics : Their History and Solution*, Edition Dover, 1965.

- [7] J. Todd, *A Problem on Arctangent Relations*, American Mathematical Monthly, 56(1949), pp517-528.

- [8] J.P. Friedelmeyer, *Arcs de cercle à tangente rationnelle et entiers imaginaires premiers*, Bulletin de l'APMEP, 358(1987), pp145-159.

- [9] D. Shanks, J.W. Wrench, *Calculation of* π *to 100000 decimals*, Math. Comput., 16(1962), pp76-79.

- [10] H. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Edition Academic Press, 1974.

- [11] R. Ayoub, *Euler and zeta function*, American Mathematical Monthly, 81(1974), pp1067-1086.

- [12] E. Hairer, G. Wanner, *Analysis by Its History*, Coll. Undergraduate Texts in Mathematics, Edition Springer-Verlag, 1995, pp160-164.

- [13] R.P. Brent, *Fast multiple-precision evaluation of elementary functions*, J. ACM, 23(1976), pp242-251.

- [14] E. Salamin, *Computation of* π *using arithmetic-geometric mean*, Math. Comput., 30(1976), pp565-570.

- [15] G. Almkvist, B. Berndt, *Gauss, Landen, Ramanujan, The arithmetic-geometric mean, ellipses,* π*, and the Ladies Diary*, American Mathematical Monthly, 95(1988), pp585-608.

- [16] J. M. Borwein, P.B. Borwein, *The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions*, SIAM Rev., 26(1984), pp351-365.

- [17] J. M. Borwein, P.B. Borwein, *Pi and the AGM : A study in analytic number theory and computational complexity*, Edition Wiley & Sons, New-York, 1987.

- [18] V. Smirnov, *Cours de Mathématiques Supérieures*, Tome 3, 2^{nde} partie, , pp598-663.

- [19] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C(in Fortran)* 2^{nd} Edition, Edition Cambridge University Press, 1992, section 20.6.

- [20] B.C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, Edition Springer-Verlag, New-York.

- [21] J. M. Borwein, P.B. Borwein, *An explicit cubic iteration for π*, BIT, 26(1986), pp123-126.

- [22] J. M. Borwein, P.B. Borwein, *More quadratically converging algorithms for π*, Mathematics of Computation, Vol. 46, 1986, pp247-253.

- [23] J. M. Borwein, P.B. Borwein, D.H. Bailey, *Ramanujan, modular equations and pi or how to compute a billion digits of pi*, American Mathematical Monthly, 96(1989), pp201-219.

- [24] D.H. Bailey, *The computation of π to 29 360 000 decimal digits using Borwein's quartically convergent algorithm*, Mathematics of Computation, Vol. 50, n^o181, January 1988, pp283-296.

- [25] Y. Kanada, *Vectorization of multiple-precision arithmetic program and 201 326 000 decimal digits of π calculation*, Supercomputing 88, Vol. 2, Science and Application, IEEE.

- [26] D. Chudnovsky, G. Chudnovsky, *The computation of classical constants*, Proc. National Academy of Science USA, Vol. 86, 1989.

- [27] E.O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Edition Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1974.

- [28] Ian Stewart, *Les algorithmes compte-gouttes*, Pour La Science, n^o215, Septembre 1995, pp104-107.

- [29] A.H.J. Sale, *The calculation of e to many significant digits*, Computing Journal, Vol. 11, 1968, pp229-230.

- [30] S. Rabinowitz, S. Wagon, *A spigot algorithm for the digits of* π, American Mathematical Monthly, 102(1995), pp195-203.
- [31] R.W. Gosper, *Acceleration of series*, Memo n^o304, MIT Artificial Intelligence Lab., Cambridge Massachussets, 1974.
- [32] J-P. Delahaye, *Obsession de* π, Pour La Science, n^o231, Janvier 1997, pp104-108.
- [33] D.H. Bailey, P.B. Borwein, S. Plouffe, *On the rapid computation of various polylogarithmic constants*, Math. Comput., Vol. 66, 1997, pp903-913.
- [34] V. Adamchik, S. Wagon, *Pi : A 2000-year search changes direction*, preprint.
- [35] P. Beckmann, *A History of Pi*, 3^{rd} Edition, Edition Dorset Press New-York, 1989, pp92-95.
- [36] R. A.J. Matthews, Nature, vol. 374, April 20, 1995, p681.
- [37] J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs*, Edition Oxford Clarendon, 1949.
- [38] I. Vardi, *Computational Recreations in Mathematica*, Reading, Edition Addison Wesley, 1991, p156-158.
- [39] K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*, 2^{nd} English Edition, 1948, p238.
- [40] C. Störmer, *Sur l'Application de la Théorie des Nombres Entiers Complexes à la Solution en Nombres Rationnels* $x_1, x_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots, k$ *de l'Equation* $c_1 \arctan x_1 + c_2 \arctan x_2 + \ldots + c_n \arctan x_n = k\pi/4$, Archiv für Mathematik og Naturvidenskab, B XIX, n^o3 ,1896, pp1-96.
- [41] R. Séroul, *Math-Info, informatique pour les mathématiciens*, Edition Inter-Edition, collection Informatique Intelligence Artificielle, 1995, pp225-226 et pp211-225.
- [42] R. Kanigel, *The Man Who Knew Infinity* , A life of the Genius Ramanujan, Edition Abacus, 1991.
- [43] Référence [18] *op. cit.* , pp263-269.
- [44] R. Preston, *The Mountains of Pi*, The New Yorker, March 2, 1992, pp36-67.

- [45] D.V. Chudnowsky, G.V. Chudnowsky, *Approximations and Complex Multiplication According to Ramanujan*, dans *Ramanujan Revisited*, Edition Academic Press, 1987, pp375-472.
- [46] J. M. Borwein, P.B. Borwein, *Class Number Three Ramanujan Type Series for* $1/\pi$, Journal of Computational Appl. Math., vol. 46, 1993, pp281-290.
- [47] M. Wetherfield, *The Enhancement of Machin's Formula by Todd's Process*, Mathematical Gazette, vol. 80, n^o488, July 1996, pp333-344.
- [48] D.H. Lehmer, *On Arcotangent Relations for* π, American Mathematical Monthly, 45(1938), pp657-664.
- [49] A.J. Van der Poorten, *Some Wonderful Formulas*, Proc. Number Theory Conf., Queen's University, Kingston, 1979, pp269-286, MR80i :10054.
- [50] R.W. Gosper, *Strip mining in the abandoned orefields of nineteenth century mathematics*, Computers in Mathematics(Stanford CA, 1986), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Dekker, New-York, 125(1990), pp261-284.
- [51] N.J. Lord, *Recent calculation of* π *: The Gauss-Salamin Algorithm*, Mathematical Gazette, 76(1992), pp231-242.
- [52] G. Miel, *Of Calculations Past and Present : The Archimedean Algorithm*, American Mathematical Monthly, 90(1983), pp17-35.
- [53] G.M. Phillips, *Archimedes in the Complex Plane*, American Mathematical Monthly, 91(1984), pp108-114.
- [54] C-.L. Hwang, *More Machin-Type Identities*, Mathematical Gazette, March 1997, pp120-121.
- [55] M. Wetherfield, *Machin Revisited*, Mathematical Gazette, March 1997, pp121-123.
- [56] J.H. Conway, R.K. Guy, *Störmer's Numbers* in *The Book of Numbers*, Edition Springer-Verlag, New-York, 1995, pp245-248.
- [57] F. Viète, *Variorum de Rebus Mathematicis Responsorum*, Liber VIII, 1593.
- [58] F. de Lagny, *Mémoire sur la quadrature du cercle et sur la mesure de tout arc, tout secteur et tout segment donné*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 1719, pp135-145.

- [59] Y. Kanada, *Story of Pi*, Tokyo-Toshyo Co. Ltd., Tokyo, Japan, 1991.
- [60] M. Gardner, *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, *Memorizing Numbers*, Chapter 11, Edition Simon and Schuster, 1959.
- [61] D. Davis, *The Nature and Power of Mathematics*, Edition Princeton University Press, 1993.
- [62] *Hardy, Apologie d'un Mathématicien*, Coll. Un savant, une époque, Edition Belin.
- [63] Référence [3] *op. cit.* , p165.
- [64] L. Bergren, J. Borwein, P. Borwein, *Pi: A Source Book*, Edition Springer-Verlag, New-York, 1997, p77, p682.
- [65] G. Joseph, *The Crest of Peacock - Non-European Roots of Mathematics*, Edition Penguin Books, 1994, pp286-294.
- [66] J. Dahse, *Der Kreis-Umfang für den Durchmesser 1 auf 200 Decimalstellen berechnet*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 27, 1844, p198.
- [67] G. Reitweisner, *An ENIAC Determination of π and e to more than 2000 Decimal Places*, Mathematical Tables ans other Aids to Computation, 4, 1950, pp11-15.
- [68] F. Genuys, *Dix mille décimales de π*, Chiffres, 1,1958, pp17-22.
- [69] D. Huylebrouck, *Van Ceulen's Tombstone*, The Mathematical Intelligencer, 4(1995), pp60-61.
- [70] V. Adamchik, S. Wagon, *A Simple Formula for π*, American Mathematical Monthly, 104(1997), pp852-855.
- [71] R.W. Gosper, *Table of Simple Continued Fraction for π and the Derived Decimal Approximation*, Stanford CA: Artificial Intelligence Lab., Stanford University, October 1975, Reviewed in Math. Comput., 31(1977), pp1044.
- [72] I. Vardi, *Computational Recreations in Mathematica*, Edition Addison-Wesley, 1991, p159.
- [73] W. Rutherford, *Computation of the Ratio of the Diameter of a Circle to its Circumference to 208 places of Figures*, Philosophical Transaction of the Royal Society of London, 131, 1841, pp281-283.

- [74] A. Waymire, *Buffon Needles*, American Mathematical Monthly, 101(1994), pp550-559.
- [75] L. Schroeder, *Buffon's Needle Problem: An Exciting Application of Many Mathematical Concepts*, Mathematics Teacher, 1974, 67(2), pp183-186.
- [76] M. Kraitchik, *The Needle Problem*, Mathematics Recreations, New-York: W.W. Norton, 1942, §6.14, pp132.
- [77] L. Badger, *Lazzarini's Lucky Approximation of* π, Mathematical Magazine, 67(1994), pp83-91.
- [78] E. Wegert, L.N. Trefethen, *From the Buffon Needle to the Kreiss Matrix Theorem*, American Mathematical Monthly, 101(1994), pp132-139.
- [79] L.J. Lange, *An Elegant Continued Fraction for* π, American Mathematical Monthly, 106(1999), pp456-458.
- [80] Thomas J. Osler, *The Union of Vieta's and Wallis's Product for* π, American Mathematical Monthly, 106(1999), pp774-776.
- [81] Dan Kalman, *Six Ways to Sum a Series*, College Mathematics Journal, 24(1993), pp402-421.
- [82] Carl Douglas Olds, *Continued Fractions*, Edition Random House, 1963.
- [83] Hervé Morin, *Les Décimales du Nombre* π, Le Monde, Jeudi 23 Octobre 1997, p25.
- [84] Yann Ollivier, π *et autres*, Quadrature, 39(2000), pp13-15.

Bibliographie Complémentaire :

- J-P. Delahaye, *Le Fascinant Nombre* π, Coll. Bibliothèque Pour La Science, Edition Belin.
- *Le Nombre* π, Le Petit Archimède, ouvrage collectif de J. Brette, R. Cuculière, Y. Roussel, L. Félix, M. Dumont, M. Milgram, G.Th. Guilbaud, A. Viricel, G. Kreweras, L. Etienne, M. Puisseger, Supplément au Petit Archimède n^o64-65, 1980.
- J. Arndt, C. Haenel, *Pi: Algorithmen, Computer, Arithmetik*, Edition Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- D. Blather, *The Joy of Pi*, Edition New-York: Walker, 1997.

2 Remerciements

Je voudrais exprimer tous mes remerciements à Bernard Pichon et Damien Wyart pour leurs judicieuses remarques et corrections. Je remercie aussi Christian Radoux de l'Université de Mons(Belgique) pour sa sympathique contribution iconographique.

Gérard Sookahet 1998-2000
`e-mail: gerard.sookahet@voila.fr`